

Algebra und Zahlentheorie.

Cooke, Richard G.: A theorem on reciprocals. J. London Math. Soc. **6**, 269—272 (1931).

Let $((y_{k,h}))$ be a matrix such that $\sum_{h=0}^{\infty} |y_{k,h}| \leq K_1$ and $\sum_{h=0}^{\infty} |y_{h,k}| \leq K_2$ independently of k . Let $K_3 = \text{Max}(1 + K_1, 1 + K_2)$, and let $K'_3 \geq |\theta_h| \geq K_3$ where $K'_3 > K_3$. The author proves that the matrix $\Omega = ((y_{k,h} - \theta_h \delta_{k,h}))$ has an unique reciprocal $\Omega^{-1} = ((\alpha_{i,k}))$ such that $\sum_{i=0}^{\infty} |\alpha_{i,k}|$ and $\sum_{i=0}^{\infty} |\alpha_{k,i}|$ converge for every k . *MacDuffee*.

Skolem, Th.: Über einige besondere Tripelsysteme mit Anwendung auf die Reproduktion gewisser Quadratsummen bei Multiplikation. Norsk mat. Tidsskr. **13**, 41 bis 51 (1931).

An unordered triple system has property E if (abe) , (cde) , (acf) imply the presence of (bdf) in the system. The author proves that there exist such systems if and only if the number n of elements is of the form $2^k - 1$. For a given n of this form all such systems belong to the same class.—A cyclicly ordered triple system has property F if (abe) , (cde) , (acf) imply the presence of (dbf) and if also (abc) , (cde) , (dbf) imply the presence of (acf) . The author shows that such systems exist only for $n = 7$ and the trivial cases $n = 0, 1, 3$, and uses this fact in a direct proof of the theorem (Hurwitz, Math. Ann. **88**, 1—25) that identities

$$L_1^2 + \dots + L_n^2 \equiv (x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2),$$

where the L_i are bilinear homogeneous functions of the x 's and y 's with integer coefficients, exist only for $n = 1, 2, 4, 8$. *MacDuffee* (Columbus).

Wegner, Udo: Über ein algebraisches Problem. Math. Annalen **105**, 779—785 (1931).

Let $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ be an equation with rational integral coefficients. Let $f(x) \equiv f_1(x) \dots f_k(x) \pmod{p}$ where p is prime, and suppose that the factors are distinct and prime modulo p of respective degrees n_1, \dots, n_k . Let s_h denote the sum of the h^{th} powers of the roots of the equation $f(x) = 0$, and let P be the period of s_1, s_2, \dots modulo p . Then the exponent to which p belongs modulo P is the l. c. m. of n_1, \dots, n_k .—This lemma is used to prove seven theorems, the principal one being the following: Let p_1, p_2, \dots be an infinite set of primes of density

(Dichte, Kronecker) $D = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{p_\nu^{1+\varrho}} \left| \log \frac{1}{\varrho} \right| > \frac{1}{2}$. If the period P_i of the set

s_1, s_2, \dots modulo p_i divides $p_i - 1$ for every prime of the set, then $f(x)$ is completely reducible in the rational field. *MacDuffee* (Columbus).

Remak, Robert: Über Untergruppen direkter Produkte von drei Faktoren. J. f. Math. **166**, 65—100 (1931).

Von der großen Menge der Resultate kann nur ein kleiner Teil wiedergegeben werden. Wegen der Bezeichnungen sehe man auch ein Referat über die Arbeit des Verf. in J. f. Math. **164** (dies. Zbl. **2**, 114).—Es sei \mathfrak{G} Untergruppe von $\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2$, und es werde \mathfrak{B}_i ($i = 1, 2$) von den \mathfrak{B}_i -Komponenten von \mathfrak{G} erzeugt; dann gilt für \mathfrak{G} eine „meromorphe“ Darstellung $\mathfrak{G} = \frac{\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2}{\mathfrak{C}_2 \times \mathfrak{I}}$, wobei $\mathfrak{C}_i = (\mathfrak{G}, \mathfrak{B}_i)$ und \mathfrak{I} eine isomorphe Beziehung zwischen $\frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{C}_1}$ und $\frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{C}_2}$ ist, und \mathfrak{G} aus allen Elementen besteht, die man erhält, indem man jedes Element einer beliebigen Nebengruppe von \mathfrak{C}_1 in \mathfrak{B}_1 mit jedem Ele-

ment der vermöge I zugeordneten Nebengruppe von \mathfrak{G}_2 in \mathfrak{B}_2 multipliziert. Es sei \mathfrak{G} invariant in \mathfrak{G} ; es sei entsprechend $\mathfrak{G} = \frac{\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2}{\mathfrak{C}_1 \prod \mathfrak{C}_2}$, wobei Π wieder ein Isomorphismus von $\frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{C}_1}$ auf $\frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{C}_2}$ ist. Es gilt dann, daß \mathfrak{B}_i invariante Untergruppe von \mathfrak{B}_i ($i = 1, 2$) ist, und wenn sich die Komplexe $B_1 \mathfrak{C}_1$ und $B_2 \mathfrak{C}_2$ (B_i in \mathfrak{B}_i) vermöge I und die Komplexe $\overline{B}_1 \overline{\mathfrak{C}}_1$ und $\overline{B}_2 \overline{\mathfrak{C}}_2$ vermöge II zugeordnet sind, daß $B_1 \overline{B}_1 B_1^{-1} \overline{\mathfrak{C}}_1$ zu $B_2 \overline{B}_2 B_2^{-1} \overline{\mathfrak{C}}_2$ vermöge II zugeordnet ist. Weiter ist $\overline{\mathfrak{C}}_i$ invariant in \mathfrak{B}_i , und in den Gruppen $\frac{\mathfrak{B}_i}{\overline{\mathfrak{C}}_i}$ ist jedes Element der Untergruppe $\frac{\mathfrak{B}_i}{\overline{\mathfrak{C}}_i}$ mit jedem Element von $\frac{\mathfrak{C}_i}{\overline{\mathfrak{C}}_i}$ vertauschbar. Weiterhin leitet Verf. eine große Anzahl von Beziehungen zwischen den folgenden Gruppen her: Es sei \mathfrak{G} Untergruppe von $\mathfrak{N}_1 \times \mathfrak{N}_2 \times \mathfrak{N}_3$, und es sei $\mathfrak{B}_1 = (\mathfrak{G} \cdot (\mathfrak{N}_2 \times \mathfrak{N}_3), \mathfrak{N}_1)$, $\mathfrak{H}_{12} = (\mathfrak{G} \cdot \mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2)$, $\mathfrak{R}_1 = (\mathfrak{G} \cdot \mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2 \times \mathfrak{N}_3)$, $\mathfrak{C}_1 = (\mathfrak{G}, \mathfrak{N}_1)$, $\mathfrak{D}_1 = (\mathfrak{G}, \mathfrak{N}_2 \times \mathfrak{N}_3)$, $\mathfrak{L}_1 = (\mathfrak{H}_{21}, \mathfrak{H}_{31})$, $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{H}_{21} \cdot \mathfrak{H}_{31}$, $\mathfrak{N}_1 = (\mathfrak{D}_1, \mathfrak{H}_{12} \times \mathfrak{H}_{13})$ (und entsprechend bei Vertauschung der Indizes 1, 2, 3). Es gilt dann z. B.: Die Faktorgruppen $\frac{(\mathfrak{L}_1 \times \mathfrak{L}_2 \times \mathfrak{L}_3) \cdot \mathfrak{G}}{\mathfrak{L}_1 \times \mathfrak{L}_2 \times \mathfrak{L}_3}$ und $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{N}_1 \cdot \mathfrak{N}_2 \cdot \mathfrak{N}_3}$ sind isomorph, und jeder Komplex der ersten Faktorgruppe enthält bei einer geeigneten isomorphen Zuordnung den entsprechenden Komplex der zweiten Faktorgruppe (d. h. die Elemente der zugehörigen Nebengruppe von $\mathfrak{N}_1 \cdot \mathfrak{N}_2 \cdot \mathfrak{N}_3$ in \mathfrak{G}). Als Anwendung wird bewiesen: Wenn $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_3$ irgend drei invariante Untergruppen einer beliebigen Gruppe \mathfrak{G} sind, so ist $\frac{(\mathfrak{D}_2 \cdot \mathfrak{D}_3, \mathfrak{D}_1)}{(\mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_1) \cdot (\mathfrak{D}_3, \mathfrak{D}_1)}$ stets kommutativ und isomorph mit den beiden anderen durch Vertauschung von $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_3$ aus ihr entstehenden Gruppen.

Magnus (Göttingen).

Noether, Emmy: Normalbasis bei Körpern ohne höhere Verzweigung. J. f. Math. 167, 147—152 (1932).

Eine Normalbasis eines galoisschen Zahlkörpers K/k ist eine Basis der ganzen Größen von K in Beziehung auf die ganzen Größen von k , die aus den Konjugierten einer Zahl besteht. Man beschränkt sich dabei, um überhaupt die Existenz einer Basis verbürgt zu haben, auf die in Beziehung auf ein Primideal \mathfrak{p} ganzen Zahlen und geht zur \mathfrak{p} -adischen Erweiterung von k über. Nach Speiser [Gruppendeterminante und Körperdiskriminante. Math. Ann. 77, 546—562 (1916)] ist für die Existenz einer Normalbasis an der Stelle \mathfrak{p} notwendig, daß der Verzweigungskörper jedes Primteilers \mathfrak{P} von \mathfrak{p} in K gleich K ist: „keine höhere Verzweigung“. Es wird bewiesen, daß diese Bedingung für die Existenz einer Normalbasis an der Stelle \mathfrak{p} auch hinreicht. Der Beweis beruht erstens auf dem folgenden, an sich interessanten Satz: Betrachtet man die Automorphismen von K/k als Linksmultiplikatoren für K (Operatorisomorphismen), so bedeutet die Existenz einer Körpormalbasis (Körperbasis, die aus den Konjugierten eines Elements besteht), daß K/k operatorisomorph ist mit dem in k gebildeten Gruppenring der galoisschen Gruppe von K/k ; und zweitens auf der Tatsache, daß in einer maximalen Ordnung eines \mathfrak{p} -adischen halbeinfachen Systems alle Ideale Hauptideale sind. Der erwähnte Satz gibt auch unmittelbar die Speisersche Lösung des Kleinschen Formenproblems, zu einer irreduziblen Darstellung λ der galoisschen Gruppe \mathfrak{G} von K/k ein System von Zahlen aus K zu finden, für das die Ausübung eines Automorphismus von K/k gleichbedeutend ist mit der linearen Transformation, die dem Automorphismus in der Darstellung λ entspricht. Man hat nur in dem als Gruppenring betrachteten Körper K die Basis eines einfachen Linksideales zu nehmen, das die Darstellung λ erzeugt. — Die Diskriminante von K/k an der Stelle \mathfrak{p} wird das Quadrat der Gruppendeterminante $|w^{ST-1}|$ (S, T in \mathfrak{G}), in der die Unbestimmten w^S durch die Elemente einer Normalbasis ersetzt sind. Ausreduktion der Gruppendeterminante ergibt eine Zerlegung der Quadratwurzel aus der Diskriminante in verallgemeinerte Lagrangesche Wurzelzahlen D_λ , die den irreduziblen Dar-

stellungen λ entsprechen. Bezeichnet $\bar{\lambda}$ die zu λ adjungierte Darstellung, so haben die Zahlen $\Delta_\lambda = D_\lambda D_{\bar{\lambda}}$ die folgende Eigenschaft: Ist \S eine Untergruppe von \mathfrak{G} , $r_1 \lambda_1 + \dots + r_m \lambda_m$ die von der Einsdarstellung von \S induzierte Darstellung von \mathfrak{G} , so gilt für die Diskriminante D_Ω des zu \S gehörigen Unterkörpers Ω/k

$$D_\Omega = \Delta_1^{r_1} \dots \Delta_m^{r_m}.$$

Zu adjungierten λ gehören per definitionem gleiche Δ_λ . Könnte man nachweisen, daß zu konjugiert algebraischen Charakteren gleiche Δ_λ gehören, so wäre die Identität der Δ_λ mit den von Artin erfundenen Führern bewiesen [E. Artin, Über die gruppentheoretische Struktur der Diskriminanten algebraischer Zahlkörper. J. f. Math. **164** (1931); dies. Zbl. **1**, 8]. Für den Fall, daß K/k zyklisch von Primzahlgrad ist, kann die Gleichheit der zu konjugiert algebraischen Charakteren gehörigen Δ_λ mit Hilfe der idealtheoretischen Zerlegung der Lagrangeschen Wurzelzahlen tatsächlich bewiesen werden; für den allgemeinen Fall steht der Beweis noch aus. Der Beweis für die Existenz einer Körperrnormalbasis ist unvollständig (Mitteilung d. Verf.). In einer Arbeit des Ref. wird aber der Beweis auf anderem Wege einwandfrei erbracht.

Deuring (Leipzig).

Artin, E.: Über Einheiten relativ galoisscher Zahlkörper. J. f. Math. **167**, 153 bis 156 (1932).

Neuer Beweis eines Satzes von Herbrand: k sei ein Zahlkörper mit der Grundeinheitenanzahl r , K ein galoisscher Erweiterungskörper von k . Es gibt $r+1$ Einheiten E_1, E_2, \dots, E_{r+1} in K von der Art, daß die relativkonjugierten Einheiten σE_i ein System unabhängiger Einheiten enthalten. σ durchläuft dabei die Elemente der galoisschen Gruppe von K/k , aber von zwei Abbildungen σ, σ' , die sich bloß um den Übergang zum konjugiert komplexen unterscheiden, nur eine. Die Anzahl der σE_i ist also um Eins größer als die Grundeinheitenanzahl von K . — Der Beweis beruht auf dem folgenden Hilfssatz von Minkowski: In einem Zahlkörper mit der Grundeinheitenanzahl r , der also $r+1$ Bewertungen $\beta_i(\varepsilon) = |\varepsilon^{(i)}|$ durch Absolutbeträge hat, sind von $r+1$ Einheiten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{r+1}$ mit den Eigenschaften $\beta_i(\varepsilon_i) > 1$, $\beta_j(\varepsilon_i) < 1$ für $j \neq i$, je r unabhängig. Eine (fest gewählte) Fortsetzung der Bewertung β_i des Grundkörpers k auf K werde ebenfalls mit β_i bezeichnet. E_1, E_2, \dots, E_{r+1} seien Einheiten von K mit der Eigenschaft, daß $\beta_i(E_i) > 1$ ist, aber E_i bei allen übrigen Bewertungen von K kleiner als Eins ausfällt; die konjugierten σE_i dieser Einheiten erfüllen dann die Bedingungen des Hilfssatzes, man kann also aus ihnen ein System unabhängiger Einheiten auswählen. Übrigens lassen sich die E_i so auswählen, daß die einzige multiplikative Relation zwischen ihnen $\prod_{i,\sigma} \sigma E_i = 1$ ist. — Artin gibt dem

Herbrandschen Satze dann noch eine andere Form, die für die Anwendungen nützlich ist: Es gibt $r+1$ Einheiten H_i in K , so daß die von r unabhängigen Einheiten ε_i aus dem Grundkörper k und den Einheiten σH_i erzeugte Gruppe von endlichem Index in der Gruppe aller Einheiten von K ist.

Deuring (Leipzig).

Herbrand, J.: Sur la théorie des groupes de décomposition, d'inertie et de ramification. J. de Math., IX. s. **10**, 481–498 (1931).

K sei ein algebraischer Zahlkörper, galoissch über dem Grundkörper k ; \bar{K} ein Zwischenkörper, $k \leq \bar{K} \leq K$, der ebenfalls galoissch über k ist. Die Gruppe von K/k sei \mathfrak{G} und \bar{K} gehöre zur Untergruppe \mathfrak{g} von \mathfrak{G} . Wenn man für ein Primideal \mathfrak{P} von K die Zerlegungsgruppe \mathfrak{G}_0 , die Trägheitsgruppe \mathfrak{G}_1 und die Verzweigungsgruppen $\mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3, \dots$ (Invariantengruppen der Restklassen von K nach den Potenzen $\mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}^3, \dots$) kennt, wie findet man die entsprechenden Gruppen γ_i für das durch \mathfrak{P} teilbare K -Primideal \mathfrak{P} ? Für die drei ersten Gruppen $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ wird die Antwort durch

$$\gamma_0 = \mathfrak{g} \mathfrak{G}_0 / \mathfrak{g}, \quad \gamma_1 = \mathfrak{g} \mathfrak{G}_1 / \mathfrak{g}, \quad \gamma_2 = \mathfrak{g} \mathfrak{G}_2 / \mathfrak{g}$$

gegeben. Für die Bestimmung der höheren Verzweigungsgruppen hat man die folgende

Regel: n_i sei die Ordnung des Durchschnittes $g_i = g \cap \mathfrak{G}_i$. Dann gibt es eine Folge von Indizes $2 < i_1 < i_2 < \dots$, so daß

$$n_2 + n_3 + \dots + n_{i_1-1} = n_1$$

$$n_{i_1} + n_i + \dots + n_{i_2-1} = n_1$$

$$\dots \dots \dots$$

gilt, und es ist

$$g\mathfrak{G}_2/g = g\mathfrak{G}_3/g = \dots = g\mathfrak{G}_{i_1-1}/g = \gamma_2$$

$$g\mathfrak{G}_{i_1}/g = g\mathfrak{G}_i/g = \dots = g\mathfrak{G}_{i_2-1}/g = \gamma_3$$

$$\dots \dots \dots$$

Von diesen Sätzen werden Anwendungen gegeben. Zum Beispiel: Wenn die Verzweigungsgruppe \mathfrak{G}_i einen Normalteiler der Ordnung p hat, der nicht in \mathfrak{G}_{i+1} liegt, so ist $\mathfrak{G}_{i+kp+1} = \mathfrak{G}_{i+kp+2} = \dots = \mathfrak{G}_{i+(k+1)p}$. Man erreicht auch einige Kongruenzen für die Ordnungen der Verzweigungsgruppen, die von Hasse für den Fall abelscher Körper aufgestellt worden sind (H. Hasse: Führer, Diskriminante und Verzweigungskörper Relativ-Abelscher Zahlkörper; J. reine angew. Math. **162**, 169). — Ein zweites Problem, das sich Verf. stellte, ist folgendes: K sei galoissch über k^* , \bar{k}/k^* beliebig, ferner $K\bar{k} = \bar{K}$, $K \cap \bar{k} = k$. Die zu einem Primideal \mathfrak{P} von K gehörigen Primideale von k^* , k , \bar{k} , K seien \mathfrak{p}^* , \mathfrak{p} , $\bar{\mathfrak{p}}$, \mathfrak{P} . Die Zerlegungs-, Trägheits- und Verzweigungsgruppen $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots$ von \mathfrak{P} in Beziehung auf k^* seien bekannt. Welches sind die entsprechenden Gruppen $\bar{\gamma}_i$ für \mathfrak{P} in Beziehung auf \bar{k} ? Faßt man die Gruppe von \bar{K}/\bar{k} als Untergruppe der Gruppe von K/k^* auf, so gilt: $\bar{\gamma}_0 \leq \gamma_0$, $\bar{\gamma}_1 \leq \gamma_1$, und allgemein $\bar{\gamma}_{n+1} \leq \gamma_{n+1}$, wenn $\bar{\mathfrak{p}}^e$ der Anteil von $\bar{\mathfrak{p}}$ an \mathfrak{p}^* ist. Ist $e = 1$, so gilt sogar $\bar{\gamma}_n = \gamma_n$ für $n \geq 1$. Zwischen dem Grad f von \mathfrak{P} in Beziehung auf k^* , dem Grad \bar{f} von \mathfrak{P} in Beziehung auf \bar{k} und dem Grad φ von $\bar{\mathfrak{p}}$ in Beziehung auf k besteht die Beziehung

$$\bar{f} \equiv 0 \pmod{f/(f, \varphi)},$$

die im Falle $e = 1$ zu

$$\bar{f} = f/(f, \varphi)$$

verschärft werden kann. — Dies Resultat wird zu einem Beweis des Verlagerungssatzes von H. Hasse benutzt: K sei Klassenkörper zur Idealgruppe H von k^* . Dann ist \bar{K} Klassenkörper zur Gruppe \bar{H} aller Ideale von \bar{k} , deren k^* -Normen in H liegen. Diesem Satze werden dann noch zwei Ergänzungen angefügt: 1. Die \bar{k} -Primideale, welche nicht in der Differenten von \bar{k}/k^* aufgehen, teilen den Führer \mathfrak{f} von H und den Führer $\bar{\mathfrak{f}}$ von \bar{H} in der gleichen Potenz. — 2. Wenn der Grad von K/k^* teilerfremd ist zu dem Grad des kleinsten \bar{k} enthaltenden galoisschen Körpers über k^* , so ist $\bar{\mathfrak{f}} = \mathfrak{f}\mathfrak{d}^{-1}$, wo \mathfrak{d} das für alle in \mathfrak{f} aufgehenden \bar{k} -Primideale \mathfrak{p} gebildete Produkt $\mathfrak{d} = \prod \mathfrak{p}^{e-1}$ ist.

Sinnstörender Druckfehler: Seite 496, Zeile 13 von oben; lies: Si K est abélien ... statt: Si \bar{k} est abélien ...

Deuring (Leipzig).

Bell, E. T.: Arithmetical composition and inversion of functions over classes. Trans. amer. math. Soc. **33**, 897—933 (1931).

This paper presents an abstraction of what the author has previously termed Euler algebra. A variety is obtained by modifying the postulates for a field. Denote by K a non-null class whose elements are subject to composition of various types. Thus Φ -composition may be thought of as a variation and abstraction of addition, and Ψ -composition of multiplication. The assertion $\Phi^p K$ means that Φ is a totally commutative operation, $\Phi^4 K$ that it is associative, and $(\Psi, \Phi)^p K$ that the Ψ -operation is distributive with respect to the Φ -operation, etc. A class subject to an operation Φ such that $\Phi^{I_1} K, \Phi^{I_2} K, \dots$ hold is called a Φ -ovoid of character I_1, I_2, \dots . When two operations are connected by a property for whose definition both are necessary,

as $(\Psi, \Phi)^D K$, the class K is called an ovum. There appears to be a possible upper bound of 1152 varieties of which modules, rings, rays, groups and semi-groups are instances. If Θ is an operation, Q a character and F_r a variety (defined in a precise way), and if $\Theta^Q F_r$, and if α and β belong to F_r , the problem of Θ -inversion is to construct ξ in F_r satisfying $(\alpha, \xi)^\Theta = \beta$ or $(\xi, \alpha)^\Theta = \beta$. This problem is completely solved. — The author considers the problem: Given ovoids and ova of prescribed characters, to construct from them further operations and classes of values of functions such that with respect to the new operations the new classes shall be varieties abstractly identical with those occurring in the algebra of numerical functions. He shows the formal identity of the abstract theory, for functions of any finite number of general variables, with the classical algebra of either power series or Dirichlet series of a single numerically valued variable or with the like for r variables. If factorability is not considered, the content of the theory of outer composition (for which decomposition is unique) is identical with that of the formal addition and multiplication of either power series or Dirichlet series in one variable. If factorability is included, inner composition (for which decomposition is not unique) holds with the further assumption of the fundamental theorem of arithmetic. *MacDuffee* (Columbus).

Watson, G. N.: Ramanujan's note books. J. Lond. math. Soc. **6**, 137—153 (1931).

Verf. gibt nach einer kurzen Biographie der Jugendjahre Ramanujans eine Schilderung seiner hauptsächlich unpublizierten Aufzeichnungen bis zum Jahre 1914. Es liegen aus diesen Jahren ca. 300 Seiten vor, die fast ausschließlich von mathematischen Sätzen ohne Beweis angefüllt sind. Wegen dieser Fülle des Materials, das nicht systematisch geordnet ist, kann Verf. nur einige Proben angeben, die in erster Linie den folgenden Gebieten entnommen sind: Magische Quadrate, Asymptotische Entwicklungen, Lösungen der diophantischen Gleichung $X^3 + Y^3 + Z^3 = W^3$, Hyperelliptische Reihen, Elliptische Funktionen, Primzahlverteilung. *Hans Heilbronn*.

Brun, Viggo: Rechenregel zur Bildung der n -ten Primzahl. Norsk mat. Tidsskr. **13**, 73—79 (1931) [Norwegisch].

Es sei $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen $\leq x$. Für die Reihe der Zahlen:

$$n_1 = n - \pi(n), \quad n_2 = n - \pi(n + n_1), \quad n_3 = n - \pi(n + n_1 + n_2), \dots$$

beweist der Verf.: $n_i = 0$ für genügend großes i . Ist n_r die erste Zahl, welche den Wert Null hat, so gilt für die n -te Primzahl $p_n = n + n_1 + n_2 + \dots + n_{r-1}$. Hiermit ist dann gezeigt, daß man für die Berechnung der n -ten Primzahl nur die vier Grundoperationen der Arithmetik braucht, da der Verf. früher (C. r. du 7^{ième} Congr. d. math. scandin. 1929, 46) schon angegeben hat, wie man $\pi(x)$ berechnen kann.

N. G. W. H. Beeger (Amsterdam).

Stratmeyer, Gottfried: Entwicklung positiver Zahlen nach Stammbrüchen. Mitt. math. Semin. Gießen H. **20**, 1—27 (1931).

Eine positive Zahl α kann 1. als Summe von Stammbrüchen $a + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \dots$, wo für jedes q die kleinste ganze Zahl genommen wird, die die entsprechende Teilsumme noch $< \alpha$ macht, 2. als Reihe $a + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_1 q_2} + \dots$, 3. als sog. Cantorsches Produkt $a \left(1 + \frac{1}{q_1}\right) \left(1 + \frac{1}{q_2}\right) \dots$ dargestellt werden, wobei in 2. und 3. die q in ähnlicher Weise Schritt für Schritt zu bestimmen sind (die Darstellung 2. ist mit der durch aufsteigende Kettenbrüche oder Teilbruchreihen identisch). Diese Darstellungen werden hier dahin verallgemeinert, daß statt der Stammbrüche $1/q$, positive oder negative Stammbrüche ε_v/q_v , wo $\varepsilon_v = \pm 1$ ist, zugelassen werden. Für die Nenner q ergeben sich in jedem Falle Ungleichungen. Insbesondere wird auch die Frage beantwortet, wie sich die Nenner q verhalten müssen, damit α rational werde. Ferner werden als besondere Fälle die Quadratwurzeln und die Zahl e behandelt.

L. Schrutka (Wien).

Estermann, Theodor: Einige Sätze über quadratfreie Zahlen. *Math. Annalen* **105**, 653—662 (1931).

Verf. beweist die folgenden 2 Sätze: Es sei $G(n)$ die Anzahl der Zerlegungen der natürlichen Zahl n in ein Quadrat und eine positive quadratfreie Zahl; es sei $H(n, l)$ für $n > 0$ und $l \neq 0$ die Anzahl der quadratfreien Zahlen der Form $z^2 + l$ mit $1 \leq z \leq n$. Dann ist für $n \rightarrow \infty$, $\varepsilon > 0$ bei festem l

$$G(n) = \sqrt{n} g(n) + O(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}), \quad H(n, l) = \sqrt{n} g(-l) + O(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}),$$

$$\text{wo } g(n) = \prod_{p^2 | n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \prod_{p > 2} \left(1 - \frac{1 + \left(\frac{n}{p}\right)}{p^2}\right) \left\{1 - \frac{1 + (-1)^{\frac{n-1}{2}}}{4}\right\} \quad \text{für } \begin{Bmatrix} 2 \nmid n \\ 2 | n \end{Bmatrix} \text{ ist.}$$

Hieraus folgt im besonderen, daß jede große Zahl in ein Quadrat und eine quadratfreie Zahl > 0 zerlegbar ist, und der Satz von Nagell, daß das Polynom $z^2 + l$ unendlich viele quadratfreie Zahlen darstellt. — Die Beweise beider Sätze sind sehr ähnlich und enthalten nur elementare Hilfsmittel. Die Darstellung ist so knapp, daß verschiedene Schlüsse dem Leser überlassen bleiben.

Hans Heilbronn (Göttingen).

Vandiver, H. S.: Summary of results and proofs on Fermat's last theorem (sixth paper). (*Dep. of Math., Univ. of Texas, Austin.*) *Proc. nat. Acad. Sci. U. S. A.* **17**, 661—673 (1931).

Der Verf. gibt einen viel einfacheren Beweis seines Satzes IV einer früheren Arbeit (*Trans. Am. Math. Soc.* **31**, 613—642). Wenn keine der Einheiten E_a , $a = a_1, a_2, \dots, a_s$,

(mod p) mit einer ganzen Zahl des Kreiskörpers $k(\zeta)$, $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{l}}$, kongruent ist [wo p ein auf der Primzahl l teilbares Primideal von $k(\zeta)$ ist und $p < l^2 - l$, $p \equiv 1 \pmod{l}$ und a_1, a_2, \dots, a_s die Indizes derjenigen Bernoullischen Zahlen $B_1, B_2, \dots, B_{\frac{l-3}{2}}$ be-

deuten, welche durch l teilbar sind], dann ist die Gleichung $x^l + y^l + z^l = 0$ im Falle $xyz \equiv 0 \pmod{l}$ unmöglich. (Zweiter Fall des letzten Fermatschen Satzes.) Weiter nennt er die Primzahl l „eigentlich irregulär“, wenn die Klassenanzahl des Kreiskörpers $k(\zeta)$ durch l teilbar ist und der zweite Faktor dieser Klassenanzahl prim zu l ist. Verf. und seine Mitarbeiter haben nun berechnet, daß alle irregulären Primzahlen < 307 auch „eigentlich irregulär“ sind, indem sie untersucht haben, ob eine Einheit E_n die n -te Potenz einer Einheit von $k(\zeta)$ ist, wenn n ein Index derjenigen Bernoullischen Zahlen ist, die durch l teilbar sind. Durch seine 5, in früheren Arbeiten bewiesenen Sätze wird dann der letzte Fermatsche Satz für alle Exponenten < 307 bewiesen. Über diese Beweise und Rechnungen mit Kontrollmittel wird berichtet.

N. G. W. H. Beeger (Amsterdam).

Netanjahu Mileikowsky, E.: Elementarer Beitrag zur Fermatschen Vermutung. (*Math. Inst., Univ. Jerusalem.*) *J. f. Math.* **166**, 116—117 (1931).

Elementarer Beweis des Satzes: „Es sei $n > 2$. Gibt es drei positive ganze teilerfremde Zahlen $x < y < z$ mit $x^n + y^n = z^n$, dann ist z nicht Primzahlpotenz. Ist n nicht Primzahl, dann sind x und y keine Primzahlpotenzen. Ist n Primzahl, dann ist y nicht Primzahl.“

Bessel-Hagen (Bonn a. Rh.)

Gelbeke, M.: Zum Waringschen Problem. *Math. Annalen* **105**, 637—652 (1931).

Bezeichnungen: $k \geq 3$ ganz, $a = 1/k$, $K = 2^{k-1}$; $L = 3$ für $k = 3$, $= 7$ für $k = 4$, $= 3$ oder $k + 1$ für $k \geq 5$; $\delta = \frac{3}{8}$ für $k = 3$, $= \frac{3}{4}$ für $k = 4$ und 5 , $= 1$ für $k \geq 6$; $s, m, n, l, q > 0$ ganz; $\varepsilon > 0$ beliebig;

$$S_{l,q,k} = \sum_{m=1}^q e^{\frac{2\pi i l m^k}{q}}, \quad \mathfrak{S}(n, k, s, x) = \sum_{q \leq x} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,q)=1}}^q \left(\frac{S_{l,q,k}}{q}\right)^s e^{-\frac{2\pi i l n}{q}};$$

$r_{k,s}(n)$ die Darstellungsanzahl von n in der Form

$$n = h_1^k + \dots + h_s^k; \quad h_1 \geq 0, \dots, h_s \geq 0 \text{ ganz;}$$

$$\sigma(m) = \sigma_{k,s,n}(m) = r_{k,s}(m) - \frac{\Gamma^s(1+a)}{\Gamma(sa)} \frac{\Gamma(sa+m)}{m!} \mathfrak{S}(m, k, s, n^{\delta a}). \quad (1)$$

Ist für alle hinreichend großen n $r_{k,s}(n) > 0$, für fast alle n [d. h. für alle, bis auf $o(x)$ Ausnahmen unterhalb x] $r_{k,s'}(n) > 0$, so mögen $G(k)$, $G_1(k)$ die kleinsten solchen s' , s'' bedeuten. Die C seien positive Konstanten, die nur von den beigefügten Parametern abhängen. Mit Vorl. meine ich die Landauschen „Vorlesungen über Zahlentheorie“. Hauptsätze: 1. „Für $s = \frac{1}{2}K(k-2) + L$ gilt

$$\sum_{m=1}^n (\sigma(m))^2 < C_1(k, \varepsilon) n^{2sa-1+\varepsilon} \begin{cases} n^{-C_s(k)} & \text{für } k=3 \\ n^{-\frac{2(L-2)}{K}a} & \text{für } k \geq 4. \end{cases} \quad (2)$$

Von (2) ausgehend gelangt man auf üblichem Wege zum Hardy-Littlewoodschen Satze

$$G_1(k) \leq \begin{cases} \frac{1}{2}K(k-2) + 3 & \text{für } k=3 \text{ und } k > 4 \\ 15 & \text{für } k=4 \end{cases} \quad (3)$$

(Vorl. Satz 346—347), nur muß man vorher feststellen, daß für hinreichend große n und alle $m \leq n$, für $k=4$ alle nicht durch 16 teilbaren $m \leq n$, $\mathfrak{S}(m, k, s, n^{\delta a}) > C_s(k)$ ist, was sofort aus Vorl. Satz 326—327 folgt. Der Übergang von (2) zu (3) ist rein arithmetisch, wenn auch noch recht mühsam; (2) dagegen gibt im wesentlichen die analytischen Schwierigkeiten des Problems. Der Gelbcke-sche Beweis von (2) wird mit Hilfe einer von Landau (Math. Z. 31) modifizierten Winogradoffschen Methode geführt und ist einfacher als der Hardy-Littlewoodsche [bei dem in (1) die volle singuläre Reihe $\mathfrak{S}(m, k, s, \infty)$ statt des Abschnittes $\mathfrak{S}(m, k, s, n^{\delta a})$ genommen wird, vgl. Vorl. Satz 345]. 2. In einem Anhang zeigt Gelbcke, wie man durch geringfügige Abänderung seines Verfahrens die Ungleichung

$$\left| r_{k,s}(n) - \frac{\Gamma^s(1+a)}{\Gamma(sa)} \mathfrak{S}(n, k, s, \infty) n^{sa-1} \right| < C_4(k, s, \varepsilon) n^{sa-1-\frac{a}{K}+\varepsilon} \quad (4)$$

für $s \geq K(k-2) + 5$ nachweisen kann. (4) (nicht so scharf Vorl. Satz 279) bildet den analytischen Kern beim Beweise des Hardy-Littlewoodschen Satzes $G(k) \leq K(k-2) + 5$ (Vorl. Satz 325) und gibt zugleich an sich die heute beste Abschätzung (Winogradoff, Landau l. c.), ist sogar für $k=3$ meines Wissens neu. Zum Beweise von (4) noch eine Bemerkung: Beim modifizierten Satz 9 müßte für $k=3$, $s \geq 18$ der Restexponent $\frac{5s}{18} - \frac{5}{6} + \varepsilon$ lauten, was ja durchaus genügt. A. Walfisz (Radośó, Polen).

Mahler, Kurt: Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus. **Tl. I.** J. f. Math. 166, 118—136 (1931).

1. Die Approximationsformeln. Sind $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ voneinander verschiedene beliebige Zahlen, q_1, q_2, \dots, q_m beliebige natürliche Zahlen, so gibt es gewiß m Polynome

$$A_k \left(z \left| \begin{matrix} \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m \\ q_1, q_2, \dots, q_m \end{matrix} \right. \right) \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (1)$$

höchstens der Grade $q_1 - 1, q_2 - 1, \dots, q_m - 1$, nicht alle $\equiv 0$, für die in der Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^m A_k \left(z \left| \begin{matrix} \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m \\ q_1, q_2, \dots, q_m \end{matrix} \right. \right) e^{\omega_k z} = R \left(z \left| \begin{matrix} \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m \\ q_1, q_2, \dots, q_m \end{matrix} \right. \right) \quad (2)$$

das Anfangsglied vom Grad $g \geq q_1 + q_2 + \dots + q_m - 1$ ist. — Verf. zeigt die Unmöglichkeit von $g > q_1 + q_2 + \dots + q_m - 1$; vielmehr muß stets $g = q_1 + q_2 + \dots + q_m - 1$ und müssen die Polynome (1) genau vom Grade $q_1 - 1, q_2 - 1, \dots, q_m - 1$ sein, und es gibt genau eine Potenzreihe (2) mit dem Anfangsglied

$$z^{q_1 + \dots + q_m - 1} / (q_1 + \dots + q_m - 1)! \quad (3)$$

Die Formel (2) gewinnt große Bedeutung, weil es leicht gelingt, diese Polynome A_k und diese Potenzreihe R explizit in den Größen ω , ϱ und z auszudrücken (Differentialausdrücke, mehrfache reelle Integrale und einfache Cauchysche Integrale, die man bereits bei Hermite findet). — Setzt man in (2) für die Veränderlichen Zahlwerte, so kann man oft mit großer Genauigkeit aus diesen Formeln herleiten, wie stark der jetzt arithmetische Ausdruck im linken Gliede die Zahl Null approximiert, wenn die ϱ oder m wachsen, vor allen Dingen etwas aussagen über die Approximation der Werte von Exponentialfunktion und Logarithmus in algebraischen Punkten durch algebraische Zahlen. Von den speziellen Sätzen nenne ich: Satz: Die Koeffizienten der linearen Form in $1, e, \dots, e^m$, $r = a_0 e^0 + \dots + a_m e^m$; $a = \max(|a_0|, |a_1|, \dots, |a_m|) > 0$ seien ganz rational. Dann gibt es eine positive Zahl c , von m und a_0, \dots, a_m unabhängig, so daß für hinreichend großes a gilt

$$|r| \geq a^{-m - \frac{cm^2 \log(m+1)}{\log \log a}} \quad (4)$$

[Man vgl. C. S. Siegel, Abh. Pr. Ak. Wiss 1929, 1; J. Popken, Math. Z. 29 (1929)]. Für π notiert Verf. folgendes schöne Ergebnis: Ersetzt man im vorigen Satz e durch π , so gilt statt (4)

$$|r| \geq a^{-cm}, \quad \text{für } a \geq a(m). \quad (5)$$

2. Die Klasseneinteilung der Zahlen. Verf. gibt folgende sinnvolle und für seine Methode wesentliche Klassifikation der Zahlen z (reell oder komplex). Es seien a und m natürliche Zahlen; es sei

$$\omega_m(a/z) = \omega_m(a) = \min_{\substack{a_0, a_1, \dots, a_m = 0, \mp 1, \dots, \mp a \\ a_0 + a_1 z + \dots + a_m z^m \neq 0}} (|a_0 + a_1 z + \dots + a_m z^m|)$$

und

$$\omega_m(z) = \omega_m = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\log 1/\omega_m(a)}{\log a}, \quad \omega(z) = \omega = \lim_{m \rightarrow \infty} \omega_m;$$

es sei $\mu(z) = \mu$ der Index, so daß $\omega_m < \infty$ für $m < \mu$ und $\omega_m = \infty$ für $m \geq \mu$ (ω und μ sind nie gleichzeitig endlich). Dann heißt z : A -Zahl, wenn $\omega = 0$, $\mu = \infty$; S -Zahl, wenn $0 < \omega < \infty$, $\mu = \infty$; T -Zahl, wenn $\omega = \infty$, $\mu = \infty$ und U -Zahl, wenn $\omega = \infty$, $\mu < \infty$ ist. — Die A -Zahlen sind alle algebraisch; die anderen sind alle transzendent; die Liouvilleschen Zahlen λ sind U -Zahlen mit $\mu = 1$. Verf. zeigt, daß zwei Zahlen aus verschiedenen Klassen algebraisch unabhängig sind. — Mit Hilfe der Methoden 1 beweist Verf. daß e^ϑ , für algebr. $\vartheta \neq 0$ eine S -Zahl ist; für $\vartheta = 1$ folgt das aus (4). Weiter beweist Verf.: sind $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_N$ algebraisch und linear unabhängig in bezug auf den Körper der rationalen Zahlen, so sind, wenn u eine beliebige U -Zahl ist, $e^{\vartheta_1}, e^{\vartheta_2}, \dots, e^{\vartheta_N}$, u algebraisch unabhängig in bezug auf den Körper der algebraischen Zahlen. Schließlich: Ist

$$z = \log \frac{p}{q} \quad (p, q \text{ ganz}, p > 0, q > 0, p \neq q)$$

oder $z = \pi$, so sind z und eine beliebige Liouvillesche Zahl λ algebraisch unabhängig in bezug auf den Körper der algebraischen Zahlen. Für $z = \pi$ folgt dies aus (5); (5) besagt, daß π entweder S oder T -Zahl ist.

J. F. Koksma (Hilversum).

Mengenlehre und reelle Funktionen.

Viola, T.: Riflessioni intorno ad alcune applicazioni del postulato della scelta di E. Zermelo e del principio di approssimazione di B. Levi nella teoria degli aggregati. Boll. Un. mat. ital. 10, 287—294 (1931).

Beispiele zu einem „Approximationsprinzip“ von B. Levi, das sich auf das Zermelosche Auswahlpostulat bezieht. Otto Szász (Frankfurt a. M.).

Sierpiński, W.: Sur une classe d'opérations sur les ensembles de points. *Mathematica (Cluj)* 5, 49—58 (1931) u. *Bul. Soc. Ști. Cluj* 6, 13—22 (1931).

Es werden systematisch die in verschiedenen Arbeiten zerstreuten Untersuchungen von Lusin, Mazurkiewicz und dem Verf. (anschließend an die von Lusin und Verf. entwickelte Theorie der sog. projektiven Mengen) sowie neue eigene Ergebnisse des Verf. zusammengefaßt, die als wichtigste Sonderfälle unter folgenden Fragenkomplex fallen: Für eine gegebene Klasse \mathfrak{K} ebener und eine gegebene Eigenschaft (Klasse) \mathfrak{E} linearer Punktengen die Klasse $I_{\mathfrak{E}}(\mathfrak{K})$ der (linearen) Mengen $I_{\mathfrak{E}}(K)$ für sämtliche zu \mathfrak{K} gehörende K zu bestimmen. Dabei bezeichnet $I_{\mathfrak{E}}(K)$ die (lineare) Menge aller derjenigen Abszissen g , für welche die (ebenfalls lineare) Durchschnittsmenge von K mit der Geraden $x = g$ von der Eigenschaft \mathfrak{E} ist (zur Klasse \mathfrak{E} gehört). Demnach gilt bei festen \mathfrak{K} und \mathfrak{E} das betr. Problem erst dann als gelöst, wenn es, umgekehrt, für jede zu der gefundenen Klasse $I_{\mathfrak{E}}(\mathfrak{K})$ gehörende Menge G eine Menge K von \mathfrak{K} gibt, die der Gleichung $I_{\mathfrak{E}}(K) = G$ genügt. Nun werden nacheinander als \mathfrak{K} und \mathfrak{E} verschiedene Mengenklassen gesetzt und der Operation $I_{\mathfrak{E}}(\mathfrak{K})$ unterworfen (in Worten: \mathfrak{E} wird durch \mathfrak{K} „durchgesehen“, wie man analog zum Lusinschen „cribler“ zu sagen pflegt). Bezeichnet man mit F die Klasse von abgeschlossenen, mit B die von Borelschen, mit A von analytischen (Suslinschen) Mengen, ferner allgemein mit $\supset \mathfrak{K}$ die Klasse der Obermengen, mit $C\mathfrak{K}$ die der Komplementärmengen und mit $P\mathfrak{K}$ die der orthogonalen Projektionen der Mengen von \mathfrak{K} , mit $\mathfrak{K} + \mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{K} \cdot \mathfrak{M}$ die Klasse der Vereinigungs- bzw. der Durchschnittsmengen der Mengen von \mathfrak{K} mit denen von \mathfrak{M} , mit \mathfrak{K}_{σ} bzw. \mathfrak{K}_{δ} die Klasse von den aus Mengen von \mathfrak{K} durch abzählbare Addition bzw. Multiplikation entstehenden Mengen, mit R die aus der Menge aller reellen Zahlen bestehende Klasse, dann mit 0 die Klasse der leeren, mit I die der eipunktigen, mit M der mehripunktigen, mit ∞ bzw. $> \alpha$ der unendlichen bzw. der unabzählbaren, mit U der nach oben unbeschränkten, mit α der (der Größe ihrer Elemente nach) wohlgeordneten vom Typus α , mit ω^* der geordneten vom Typus ω^* , mit Max. , der ein Maximum enthaltenden und schließlich mit D bzw. P der insichdichten bzw. der perfekten Mengen, so lassen sich am kürzesten die vom Verf. angegebenen Lösungen in folgende Tabelle aufstellen (wo die Klassen an Kreuzungsstellen von \mathfrak{E} -Zeilen mit \mathfrak{K} -Spalten abzulesen sind und die Fragezeichen die vom Verf. gestellten, jedoch bis jetzt ungelösten Probleme bedeuten):

			Klassen \mathfrak{K} ebener Punktengen					
			F	F_{σ}	G_{δ}	B	A	CA
Eigenschaften \mathfrak{E} von linearen Punktengen	1.	$C0$	F_{σ}	F_{σ}	A	A	A	
	2.	I	$F_{\sigma} \cdot CF_{\sigma}$	$F_{\sigma} \cdot CF_{\sigma}$	A	A	$A \cdot CA$	
	3.	M	F_{σ}	F_{σ}	A	A	A	
	4.	∞	$F_{\sigma\delta}$	$F_{\sigma\delta}$	A	A	A	PCA
	5.	$> \alpha$	A	A	A	A	A	$?$
	6.	U	$F_{\sigma\delta}$	$F_{\sigma\delta}$	A	A	A	
	7.	$\supset \omega^*$	A	A	A	A	A	PCA
	8.	α	$?$	$?$	$?$	$?$	$?$	
	9.	Max.	$G_{\delta\sigma}$	$G_{\delta\sigma}$	$?$	$?$	$?$	
	10.	D bzw. D oder 0	$F_{\sigma\delta}$	$F_{\sigma\delta}$	A	A	$(A + CA)_{\delta}$	
	11.	$\supset D$	A	A	A	A	A	
	12.	F oder 0	R	CA	CA	CA	$CPCA$	
	13.	P	$F_{\sigma\delta}$	$F_{\sigma\delta}$	$?$	$?$	$CPCA$	
	14.	$\supset P$	A	A	A	A	A	PCA

Hierzu wird bemerkt: ad 8., daß vorläufig nur die Beziehung $\Gamma_{\alpha}(F) \subset B$ bekannt ist, während sogar die Frage, ob für $\alpha < \beta$ stets $\Gamma_{\alpha}(F) \subset \Gamma_{\beta}(F)$ gilt, offen bleibt, und ad 13., daß sich vorläufig bloß $\Gamma_P(B) \subset A \cdot CA$ behaupten läßt. Zum Schluß werden zwei Sätze bewiesen, die sich gewissermaßen auf die Umkehrung der Sieb-Operation beziehen: daß es für jede

einzelne lineare Punktmenge G stets eine ebene Menge K von F und eine Eigenschaft \mathfrak{G} gibt, derart, daß $\Gamma_{\mathfrak{G}}(K) = G$ ist, während es nicht für jede Klasse \mathfrak{G} von linearen Punkt Mengen eine Eigenschaft \mathfrak{G} gibt, derart, daß $\Gamma_{\mathfrak{G}}(F) = \mathfrak{G}$ gelte (denn die Mächtigkeit der Menge verschiedener Klassen \mathfrak{G} ist größer als die der Menge verschiedener Eigenschaften \mathfrak{G} der abgeschlossenen Mengen). Als Fortsetzung dieser und verwandter Untersuchungen soll die neue Abh. des Verf. „Sur certaines opérations sur les ensembles fermés plans“ in Comptes rendus de la Soc. des Sciences et des Lettres de Varsovie **24** (1931) gelten (vgl. nachstehendes Ref.).
B. Knaster (Warszawa).

Sierpiński, W.: Sur certaines opérations sur les ensembles fermés plans. Sprawozd. Towarz. nauk. warszaw., Wydz. III **24**, 57–77 (1931).

Fortsetzung der vorangehend referierten Untersuchungen des Verf. „Sur une classe d'opérations sur les ensembles de points“ (Bull. Soc. Sci. Cluj **1931**, 49–58) mit Angabe deren wichtigster Anwendungen. Die dort gestellte Frage über Umkehrung der Sieboperation $\Gamma_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{R})$, und zwar: für eine gegebene Klasse \mathfrak{R} ebener und eine gegebene Klasse \mathfrak{G} linearer Punkt Mengen eine Eigenschaft (Klasse) \mathfrak{G} von ebenfalls linearen Mengen derart zu bestimmen, daß $\Gamma_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{R}) = \mathfrak{G}$ gelte, wird im Falle von \mathfrak{R} fest, nämlich für $\mathfrak{R} = F$ (Klasse der ebenen abgeschlossenen Mengen) eingehend betrachtet. — Es wird zunächst folgendes allgemein gezeigt: Gibt es zu einer Klasse \mathfrak{G} eine der Gleichung $\Gamma_{\mathfrak{G}}(F) = \mathfrak{G}$ genügende Eigenschaft \mathfrak{G} , so gibt es eine zu \mathfrak{G} gehörende Punktmenge G , deren Komplementärmenge nicht mehr zu \mathfrak{G} gehört. Sonderfälle: Bei keinem \mathfrak{G} kann $\Gamma_{\mathfrak{G}}(F) = B$ (Klasse der Borelschen Mengen), ebensowenig $\Gamma_{\mathfrak{G}}(F) = F_0 G_0$ (Klasse von Mengen, die zugleich F_0 und G_0 sind) gelten. Ist dabei \mathfrak{G} effektiv definierbar, so ist es auch G . Anwendung: Effektivität einer analytischen nicht-Borelschen Menge. — Auf Grund von allgemein bewiesenen Summen- und Produktsätzen wird ferner für jede Ordinalzahl $\alpha < \Omega$ die Existenz u. a. von Hausdorffschen Mengen P^α und Q^α (also die Existenz sämtlicher Klassen von Borelschen Mengen) sowie die Existenz von Mengen $P_{\mathfrak{G}_n}^\alpha$ (Differenzen zweier $P_{\mathfrak{G}_{n-1}}^\alpha$, wo $P^\alpha = P_{\mathfrak{G}_0}^\alpha$ zu setzen ist), $Q_{\mathfrak{G}_n}^\alpha$ und $A_{\mathfrak{G}_n}$ (A analytisch) hergeleitet, die keiner niedrigeren Mengenklasse angehören. Nebenbei erhält man in einer einfachen Weise für jedes $\alpha < \Omega$ eine universale ebene P^α -Menge U , d. h. ein ebenes P^α , dessen Durchschnitte mit vertikalen Geraden sämtliche lineare P^α ergeben. Die Komplementärmenge von U ist eine universale Q^α -Menge. Analog werden universale ebene $P_{\mathfrak{G}_n}^\alpha$, $Q_{\mathfrak{G}_n}^\alpha$ - und $A_{\mathfrak{G}_n}$ -Mengen konstruiert. Unter der Voraussetzung, daß alle Durchschnitte der Mengen von $\Gamma_{\mathfrak{G}}(F)$ mit beliebigen G_0 -Mengen wieder zu $\Gamma_{\mathfrak{G}}(F)$ gehören, wird auf Grund des Lavrentieffschen Erweiterungssatzes die Invarianz von solchen $\Gamma_{\mathfrak{G}}(F)$ gegenüber der Homöomorphie bewiesen. Sonderfälle: Invarianz von P^α , Q^α , $P_{\mathfrak{G}_n}^\alpha$ usw. für $2 < \alpha < \Omega$, sowie die von CA (Komplementär Mengen der analytischen Mengen). Nach einigen allgemeinen Sätzen und deren Anwendungen auf Hausdorffsche Operationen wird zum Schluß, durch Ausdehnung der Theorie auf mehrdimensionale euklidische Räume, die Existenz von Eigenschaften \mathfrak{G} bewiesen, welche als $\Gamma_{\mathfrak{G}}(F)$ u. a. Klassen von sog. projektiven Mengen ergeben.
B. Knaster (Warszawa).

Rado, Richard: Über stetige Fortsetzung reeller Funktionen. Sitzgsber. math.-naturwiss. Abt. bayer. Akad. Wiss. München H. **2**, 81–84 (1931).

Two new, brief proofs of the possibility of defining a continuous function for the whole of \mathfrak{R}_n (= euclidean n -space) identical with a continuous function f given on a closed subset \mathfrak{M} of \mathfrak{R}_n . The argument rests on the elementary fact that \mathfrak{M} contains a dense, denumerable subset D ; f known on D is known on \mathfrak{M} , and the definition of f at an arbitrary point P not belonging to \mathfrak{M} may be made, without difficulty, to depend essentially on the values of f at points of D near P , thus ensuring continuity.

H. Blumberg (Columbus).

Szpilrajn, Edward: Sur un ensemble non mesurable de M. Sierpiński. Sprawozd. Towarz. nauk. warszaw., Wydz. III, **24**, 78–85 (1931).

Nach W. Sierpiński folgt aus der Kontinuumhypothese $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ die Existenz einer solchen un abzählbaren ebenen Punktmenge S , daß jede meßbare Untermenge von S höchstens abzählbar ist. Verf. beweist, daß S ein unendliches Caratheodorysches

lineares Maß hat und daß jede seine Untermenge nach Caratheodory meßbar ist, und zeigt noch einige paradoxe Eigenschaften dieser Menge. *A. Kolmogoroff.*

Dushnik, Ben: A note on transfinite ordinals. Bull. Amer. Math. Soc. **37**, 860 bis 862 (1931).

Neuer Beweis und Verallgemeinerung des folgenden Satzes von Alexandroff und Urysohn [Mémoire sur les espaces topologiques compacts. Verh. Akad. Wiss. Amsterdam (1) **45**, Nr 1, 1—96]: Ist für jede Ordnungszahl σ der 2. Zahlklasse eine Ordnungszahl $\varepsilon(\sigma) < \sigma$ definiert, so gibt es un abzählbar-viele σ , für welche die $\varepsilon(\sigma)$ untereinander gleich sind. Verf. verallgemeinert diesen Satz für Ordnungszahlen einer beliebigen Cantorschen Zahlklasse mit Nichtlimesindex [es gibt dann eine Menge der σ von der Mächtigkeit der betreffenden Zahlklasse, für die $\varepsilon(\sigma)$ denselben Wert hat]. Verf. gibt an, daß man letzteren Satz auch mit der Methode von Alexandroff und Urysohn beweisen könnte. *P. Alexandroff (Moskau).*

Analysis.

● **Dienes, P.:** The Taylor series. An introduction to the theory of functions of a complex variable. Oxford: Clarendon Press 1931. XII, 552 S. geb. 30/-.

Die erste Hälfte des Buches (Kap. I—VII) ist eine Einführung in die Funktionentheorie in der üblichen Verbindung der Wege von Cauchy und Weierstrass, unter Verzicht auf Riemannsche Gedankengänge. Von Anfang an werden die unendlichen Reihen in den Vordergrund gestellt und ausgiebig benutzt. Im Hinblick auf die besonderen Ziele des zweiten Teils geht das Kap. II (Komplexe Algebra) merklich über das hinaus, was für die Grundlegung der Funktionentheorie notwendig ist; eine Skizze über hyperkomplexe Algebren findet hier ihren Platz. Jedem Kapitel des ersten Teils sind zahlreiche Aufgaben beigelegt, größtenteils Übungsaufgaben, zum Teil aber auch solche, die zu neueren Ergebnissen hinleiten. — Die zweite Hälfte wird durch ein Kapitel über den Picardschen Ideenkreis eingeleitet. Es bringt die Sätze von Landau (1904), Schottky (1904) und Bloch (1925), sodann die Picardschen Sätze. Es folgt der Beweis von Fejér und F. Riesz für den Riemannschen Abbildungssatz, der Verzerrungssatz und die anschließenden Bieberbachschen Sätze (1916—1918), schließlich der Reinhardtische Satz (1928). — Kap. IX behandelt im Anschluß an die Mittag-Lefflersche Partialbruchzerlegung und die Weierstrasssche Produktdarstellung das Borelsche Summationspolygon und den Mittag-Lefflerschen Stern. — Kap. X: Rationalitätskriterien von Kronecker (1881) und Pólya (1922), Nichtfortsetzbarkeitskriterien von Szegő (1922), die Hadamardschen Sätze über den Meromorphiekreis (1892), die Sätze von Leau (1899), Wigert (1900) und Faber (1903) über Funktionen mit genau einer singulären Stelle, ferner Sätze von Lindelöf (1902, 1903) über Funktionen im Winkelraume, von Hadamard (1898), Borel (1898) und Faber (1907) über Potenzreihen, deren Koeffizienten die Produkte der entsprechenden Koeffizienten zweier anderen Potenzreihen sind. — Kap. XI: Nullstellensätze von Hurwitz (1889) und Jentzsch (1917), Überkonvergenzsätze von Ostrowski (1921 bis 1923), Lückensätze von Fabry (1896) und hiermit verwandte Sätze von Pólya (1916), Mandelbroit (1923, 1924) und Ostrowski (1926). — Kap. XII: Eine Exposé über divergente Reihen und ihre Summierung, unter dem Gesichtspunkte der Anwendung auf Potenzreihen oder des Zusammenhanges mit solchen Reihen. Auf eine knappe, sachlich erschöpfende Darstellung des Toeplitzschen Satzes über lineare Mittelbildungen (1911) und der Ergänzungen und Modifikationen dieses Satzes (Steinhaus [1911], Silverman [1913], Kojima [1917], I. Schur [1920], Perron [1920], ferner unveröffentlichte Sätze des Verf. und von Bosanquet) folgen Betrachtungen über den Kalkül mit unendlichen Matrizen, über Permanenz, insbesondere gegenseitige Permanenz (mutual consistency) und über Vertauschbarkeit. Als Beispiele werden die arithmetischen Mittel, das Abelsche und die exponentiellen Verfahren (Borel), das Verfahren von Le Roy kurz, die allgemeinen Cesàroschen sehr ausgiebig und vollständig behandelt. — Kap. XIII: Sätze über das Verhalten der Potenzreihen auf dem Konvergenzkreise. Stetigkeitssätze von Abel, Frobenius und Hölder, die Landauschen Sätze über Abschätzung der Partialsummen und der arithmetischen Mittel der Partialsummen einer beschränkten Potenzreihe (1913—1916), das hierhin gehörige Fejérsche Beispiel (1910), die Sätze von Hardy (1913) und Bohr (1916—1917) über das Wachstum von $\sum |a_n| \cdot r^n$, das Beschränktheitskriterium von R. Nevanlinna (1919), Fatous Satz (1906) über die Existenz der radialen Limites beschränkter Potenzreihen, mit den Ergänzungen von F. und M. Riesz (1916), die Variante von Ostrowski und F. Riesz (1922—1923) des Vitalischen Doppelreihensatzes, die Lindelöfschen Sätze aus dem Jahre 1915, Lusins Beispiel (1911), Hardys Beispiel einer nicht absolut, aber gleichmäßig konvergenten Potenzreihe (1913—1914). Einige neuere Sätze über das Konvergenzverhalten einer Potenzreihe an einer regulären Stelle ihres Konvergenzkreises beschließen das Kapitel. — Kap. XIV: Divergenz und Singularitäten.

Der $O_L - A \rightarrow K$ -Satz von Hardy-Littlewood (1913; Beweis nach dem Muster von Hardy-Littlewood), mehrere Sätze aus der Wachstumstheorie von Hadamard (1892), Analoga und Verwandtes zu diesen Sätzen bei Heranziehung der arithmetischen Mittel: Dienes (1911—1913), Hardy-Littlewood (1924), ebenso bei Heranziehung der Borelschen, Mittag-Lefflerschen und Lindelöfschen Transformationen. R. Schmidt (Kiel).

Hardy, G. H., and J. E. Littlewood: Some properties of fractional integrals. II. *Math. Z.* **34**, 403—439 (1931).

The present paper is a continuation of a paper published under the same title in *Math. Z.* **27**, 565—606 (1928). While in the former paper the authors were concerned mainly with the classes L_p , $p \geq 1$, and "means" $M_p(r, f)$ that remained bounded as $r \rightarrow 1$, in the present paper they are interested primarily in essentially more general and difficult cases, where $p > 0$, and $M_p(r, f) = O[(1-r)^{-a}]$, $a \geq 0$. The following notation is consistently used.

$$M_p = M_p(f) = M_p(r, f) = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right]^{1/p}; \quad M(r, f) = M_{\infty}(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

If $f(z) = \sum a_n z^{n+c}$, then $f_{\beta}(z) = \sum \frac{\Gamma(n+1+c)}{\Gamma(n+1+c+\beta)} a_n z^{n+c+\beta}$, where $z^c, z^{c+\beta}$ have their principal values. Also, $f^{\beta} = f_{-\beta}$. This definition of the fractional integral of $f(z)$ [assumed to be analytic in $|z| < 1$] reduces to Liouville's definition when $\beta > 0$,

$$f_{\beta}(z) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^z (z-w)^{\beta-1} f(w) dw$$

(which is used in the case of real variables), the path of integration being rectilinear. The authors consider also

$$f_{\beta}^*(z) = f_{\beta}^*(r, \theta) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^r (r-\varrho)^{\beta-1} |f(\varrho e^{i\theta})| d\varrho, \quad f_{\beta}^{**}(z) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^r (r-\varrho)^{\beta-1} \max_{t \leq \varrho} |f(te^{i\theta})| d\varrho.$$

The main results, based upon chains of intermediary theorems, can be summarized as follows, the letter α being used to designate $(1/p - 1/q)$. — 1. If $a \geq 0$, $0 < p < q \leq \infty$, and $M_p(f) \leq C(1-r)^{-a}$, then $M_q(f) \leq KC(1-r)^{-a-\alpha}$, where $K = K(p, a)$. If $a = 0$, then also $M_q(f) = o[(1-r)^{-\alpha}]$. On setting $f(z) = \sum a_n z^n$ we also have $a_n = O(n^{a+1/p-1})$ or $O(n^a)$, according as $p \leq 1$ or $p > 1$. The symbol " O " can be replaced by " o " when $a = 0$. — 2. If $0 < p < q < \infty$, and $M_p(f) \leq C$, then $M_q(f^{**}) \leq KC$. This implies the analogous inequalities where f_{α}^{**} is replaced by f_{α}^* or by f_{α} in the left-hand member. If $1 < p < q < \infty$, $u(z)$ is harmonic in the circle $|z| < 1$, and $M_p(u) \leq C$, then $M_q(u_{\alpha}) \leq M_q(u_{\alpha}^*) \leq KC$. — 3. If $a > 0$, $0 < p \leq q \leq \infty$, $\beta > -a - \alpha$, or $a = 0$, $0 < p \leq q \leq \infty$, $\beta \geq -\alpha$, and $M_p(f) \leq C(1-r)^{-a}$, then $M_q(f_{\beta}) \leq KC(1-r)^{-a-\beta-\alpha}$, where $K = K(p, q, a, \beta)$. The result is not necessarily true when $a > 0$, $\beta = -a - \alpha$. But when $a = 0$, $\beta > -\alpha$, we have also $M_q(f_{\beta}) = o[(1-r)^{-\beta-\alpha}]$. Other group of results consists in the determination of necessary and sufficient conditions in order that an analytic function would belong to a class $\text{Lip}(k)$ or $\text{Lip}(k, p)$, these notions, familiar in the theory of functions of a real variable, being suitably extended to the case of analytic functions. An important rôle in authors' discussion is played by their results concerning certain averages, obtained in a previous paper [*Acta Math.* **54**, 81—116 (1930)]. F. Riesz's "decomposition theorem" is another tool which they consistently use. The following result should be mentioned separately: If $f(z)$ is analytic in $|z| < 1$, and $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(r, \theta) = \max_{0 \leq t \leq r} |f(te^{i\theta})|$,

then \mathfrak{F}^{λ} is subharmonic, provided $\lambda > 0$. The authors express their intention to discuss in a separate paper analogous problems connected with a pair of conjugate harmonic functions.

J. D. Tamarkin (Providence).

Karamata, J.: Application de quelques théorèmes d'inversion à la sommabilité exponentielle. *C. R. Acad. Sci. Paris* **193**, 1156—1159 (1931).

Es handelt sich um die Frage, wann die Summierbarkeit einer Reihe mittels des Borelschen Integrals die Summierbarkeit mittels des Borelschen (Reihen-)Verfahrens bedingt. Als Spezialfall allgemeinerer Tauberschen Sätze, die anderswo erscheinen werden, gibt der Verf. die beiden hinreichenden Bedingungen an:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{e^{-t'} u(t') - e^{-t} u(t)\} \geq -w(h), \quad (1)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} \{u(t') - u(t)\} \geq -w(h), \quad (2)$$

wo

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n / n!$$

die assoziierte ganze Funktion ist, und $w(h)$ eine positive Funktion ist, die mit h gegen Null strebt ($h > 0$). Ferner $t \leq t' \leq t + h$. Als Spezialfälle von (1) werden erwähnt: $Cu(t) + u'(t) \geq -Me^t$. $Cu_{n-1} + u_n \geq -M$, $u_n \geq -M$, $u_n - u_{n-1} \geq -M$. Dabei sind C und M feste, positive Zahlen, und die Bedingungen sollen für jedes t bzw. n gelten. Dieselben Bedingungen sind hinreichend, damit die Summierbarkeit von $\sum_1^{\infty} u_n$ diejenige von $\sum_0^{\infty} u_n$ bedingt. Hille (Princeton).

Gray, Marion C.: Note on some self-reciprocal functions in the double Fourier transform. *J. London Math. Soc.* **6**, 247–250 (1931).

Let $\Phi(x_1, x_2)$ be reciprocal functions in the double Fourier transform,

$$\Psi(y_1, y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x_1, x_2) \exp[2\pi i(x_1 y_1 + x_2 y_2)] dx_1 dx_2,$$

$$\Phi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(y_1, y_2) \exp[-2\pi i(x_1 y_1 + x_2 y_2)] dy_1 dy_2.$$

Then (I) If $\Phi(x_1, x_2)$ may be expressed in polar coordinates as $\Phi(x_1, x_2) = f(r) \cos n\theta$, n integer ≥ 0 , then $\Psi(x_1, x_2)$ can be expressed in a similar form $\Psi(x_1, x_2) = 2\pi i^n g(r) \cos n\theta$ where $g(r)$ is the Fourier-Bessel transform of $f(r)$, of order n , that is $g(r) = \int_0^{\infty} f(\varrho) J_n(2\pi r \varrho) \varrho d\varrho$. (II) If $f(r)$ is a self-reciprocal function in the Fourier-Bessel transform of order $4n$, $f(\varrho) = \int_0^{\infty} f(r) J_{4n}(r\varrho) (r\varrho)^{1/2} dr$, then $\Phi(x_1, x_2) = r^{-1/2} f(r) \cos n\theta$, $r^2 = 2\pi(x_1^2 + x_2^2)$, is a self-reciprocal function in the double Fourier transform. Some special examples are discussed. The method of procedure is formal. J. D. Tamarkin (Providence).

Montel, Paul: Sur la limite supérieure des modules des zéros des polynomes. *C. R. Acad. Sci. Paris* **193**, 974–976 (1931).

This preliminary announcement contains a number of results concerning the upper limit ϱ of the absolute values of the roots of the polynomial

$$P(x) \equiv x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

under different assumptions on the a 's. We note the following.—1. Let

$$|a_1|^m + \dots + |a_n|^m \leq N^m, \quad \frac{1}{m} + \frac{1}{m'} = 1, \quad m > 1,$$

then

$$\varrho < (1 + N^{m'})^{\frac{1}{m'}}.$$

2. $\varrho < L$ where L is the length of the polygonal line joining the points $0, a_1, a_2, \dots, a_n, 1$ taken in this order. The case $L = 1$ gives the theorem of Eneström-Kakeya.—3. Consider the family of polynomials $P(x)$ such that $|a_k| \leq c_k$, where the $c_k > 0$ are given. A nec. and suff. condition that the zeros of these polynomials shall form a bounded point-set is that $\lim \sqrt[n]{c_n} < \infty$, in which case $1/\varrho$ is the positive root of the equation $\sum_1^{\infty} c_n x^n = 1$.—Finally some applications of the theory of normal families. Hille.

Besicovitch, A. S., and H. Bohr: Almost periodicity and general trigonometric series. *Acta math. (Uppsala)* **57**, 203–292 (1931).

Systematische Untersuchung über die Reziprozität zwischen Fastperiodizitätsdefinitionen einerseits und Konvergenzdefinitionen von Folgen trigonometrischer

Polynome, insbesondere von trigonometrischen Reihen, andererseits; Erweiterung und Vertiefung einer früheren Note der Verff. in Proc. Lond. math. Soc., II. s. 25, 495—512 (1926).

R. Schmidt (Kiel).

Kovanko, O.: Sur la composition des fonctions presque périodiques. Zap. fiz.-mat. Vidd. vse-ukrain. Akad. Nauk Kyivi 5, 7—8 (1931).

L'auteur démontre d'une façon fort simple le théorème suivant: Soit $F(u_1, u_2, \dots, u_n)$ une fonction continue des variables complexes u_k dans le domaine:

$$|u_k - u_k^0| < \alpha_k \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

et soient $f_k(x)$ n fonctions p. p. de la variable réelle x telles que:

$$|f_k(x) - u_k^0| < \alpha_k$$

alors la fonction

$$\varphi(x) = F[f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)]$$

est elle-même p. p.

J. Favard (Grenoble).

Delens, Paul: Sur les gradients et certaines de leurs indéterminations. Bull. Sci. math., II. s. 55, 374—377 (1931).

Sansone, G.: Il teorema di oscillazione per le equazioni differenziali ordinarie del terzo ordine lineari omogenee a coefficienti costanti. Boll. Un. mat. ital. 10, 277—282 (1931).

Verf. betrachtet die Lösungen $y(x)$ der Diffgl. mit konstanten Koeffizienten $y''' + p_1 y'' + \lambda p_2 y' + \lambda p_3 y = 0$, die in zwei Punkten $x = a$ und $x = b$ verschwinden, und zeigt, daß sie für hinreichend großes λ in einem beliebigen festen Teilintervall von $[a, b]$ eine Nullstelle haben (vgl. übrigens dies. Zbl. 2, 390). H. Lewy.

Wegner, Udo: Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen. Math. Annalen 105, 786—789 (1931).

Verf. betrachtet ein Polynom n -ten Grades $P(y)$ und die linear unabhängigen Zweige y_1, y_2, \dots, y_m seiner Umkehrfunktion, deren Verzweigungszahlen an jeder Verzweigungsstelle mod. 1 genommen einander inkongruent sind, und die sämtliche lin. unabh. Lösungen einer lin. Differentialgleichung $L(y) = 0$ ausmachen. Er beweist auf algebraischem Wege, daß $P(y)$ bis auf eine lin. Transformation eine Potenz y^n oder ein Tschebyscheffsches Polynom $T_n(y)$ ist (vgl. dazu I. Schur, Sitzgsber. d. Preuß. Ak. d. Wiss., Berlin 1923, 123—134).

v. Koppenfels (Hannover).

Koppenfels, Werner v.: Der Faltungssatz und seine Anwendung bei der Integration linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Math. Annalen 105, 694—706 (1931).

Der Faltungssatz:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(is + \sigma_1 + \sigma_2) f_2(is + \sigma_1 + \sigma_2) e^{(is + \sigma_1 + \sigma_2)t} ds \\ &= \int_0^t \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(iq + \sigma_1) e^{(iq + \sigma_1)\tau} dq \right) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(ir + \sigma_2) e^{(ir + \sigma_2)(t-\tau)} d\tau \right) d\tau \end{aligned}$$

ist mit Hilfe der komplexen Integration unter gewissen Bedingungen bewiesen. Auch der bekannte gleiche Satz aus der Theorie der Laplace-Transformation läßt sich mit Hilfe des vorhergehenden Satzes herstellen. Es wird danach die Lösung eines Rand- und Anfangswertproblems der Telegraphengleichung als ein komplexes Integral gewonnen, welches Heavisides symbolischer Lösung entspricht. Die Bestimmung der Lösung in der vom Verf. gegebenen Weise hilft den physikalischen Sinn der Methode der Laplace-Transformation zu verdeutlichen.

Janczewski (Leningrad).

Webb, J. H.: The potential due to a buried spheroid. Physic. Rev., II. s. 38, 2056 bis 2067 (1931).

Die Schwierigkeiten, welche bei Ermittlung des elektrischen Potentials eines in einen unendlichen Halbraum eingesenkten Rotationsellipsoids auftreten, lassen sich

zum Teil dadurch umgehen, daß man den Halbraum und das eingesenkte Sphäroid an der Begrenzungsebene spiegelt und dann das Potential der beiden Sphäroide in dem unendlichen Raum untersucht. Nach Einführung geeigneter krummliniger Koordinaten (verschieden nach dem Typus des Rotationsellipsoids) erhält man eine unendliche nach Kugelfunktionen fortschreitende Reihe für den reziproken Wert des Abstandes:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{b} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) \left[P_m(\xi_1) P_m(\eta_1) Q_m(\xi_2) P(\eta_2) \right. \\ \left. + 4 \sum_{q=1}^m \frac{(m-q)!^2}{(m+q)!} P_m^q(\xi_1) P_m^q(\eta_1) Q_m^q(\xi_2) P_m^q(\eta_2) \cos q(\varphi_2 - \varphi_1) \right].$$

(Formel für das verlängerte Rotationsellipsoid; für das abgeplattete ist zu setzen: $\xi_1 = i\varrho_1$, $\xi_2 = i\varrho_2$.) Die auf die geeigneten krummlinigen Koordinaten transformierte Laplacesche Differentialgleichung wird in bekannter Weise durch eine im wesentlichen nach Kugelfunktionen fortschreitende Reihe mit unbestimmten Koeffizienten gelöst. Die Bestimmung der Koeffizienten führt auf ein System von unendlich vielen Gleichungen mit unendlich vielen Veränderlichen. Für dieses System wird eine Näherungslösung ermittelt. (Vgl. auch dieses Zbl. 1, 63.) F. Knoll (Wien).

Lambe, C. G.: A generalization of Bessel's integrals. J. London Math. Soc. 6, 257 bis 259 (1931).

Die von Bessel angegebene Integraldarstellung für $J_0(\sqrt{z^2 - y^2})$ wird für den Fall einer beliebigen Ordnung ν verallgemeinert; eine entsprechende Formel wird auch für $Y_\nu(\sqrt{z^2 - y^2})$ angegeben. H. Jordan (Rom).

Bailey, W. N.: An extension of Meissel's expansions in Kapteyn series, and some similar expansions. Proc. London Math. Soc., II. s. 33, 154—159 (1931).

The author proves the validity of the expansion

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1} z^{a+b+2r-2} \zeta^{2r-2}}{(a+\zeta)(a+1+\zeta) \dots (a+r-1+\zeta)(b-\zeta)(b+1-\zeta) \dots (b+r-1-\zeta)} \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+b+n)}{n!} \left[\frac{J_{a+b+2n}\{2z(a+n)\}}{(a+n)^{a+b}(a+\zeta+n)} + \frac{J_{a+b+2n}\{2z(b+n)\}}{(b+n)^{a+b}(b-\zeta+n)} \right]$$

where ζ is any complex number such that neither $a + \zeta$ nor $b - \zeta$ is zero or a negative integer and z lies in the domain K defined by the inequality $|ze^{\sqrt{1-z^2}}/(1+\sqrt{1-z^2})| < 1$. Assuming $a = b$ and replacing ζ by ζi gives an expansion which is a generalisation of Meissel's expansions in Kapteyn series, and reduces to these for (1) $a = b = 1$, (2) $a = b = \frac{1}{2}$ and (3) $\zeta = 0$, $a = b = \frac{1}{2}\nu$. Hildebrandt (Ann Arbor).

Copson, E. T.: The operational calculus and the evaluation of Kapteyn integrals. Proc. Lond. math. Soc., II. s. 33, 145—153 (1931).

The author points out in this paper that integrals of the Kapteyn and Bateman type involving Bessel's functions can be easily deduced by the use of a symbolic representation, which is a modification of the Laplace transform. $F(x)$ is the symbolic representation (s. r.) of $f(p)$ if $f(p) = p \int_0^{\infty} e^{-px} F(x) dx$. The functions $F(x)$ being assumed to be continuous on $0 < x < x_0$ for every x_0 , and such that $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{x_0} |F(x)| dx$ exists, the procedure depends upon the Lerch uniqueness theorem, and the composition theorem, that if $f_1(p)$ is the s. r. of $F_1(x)$ and $f_2(p)$ of $F_2(x)$ then $f_1(p) \cdot f_2(p)/p$ is the s. r. of $\int_0^x F_1(t) F_2(x-t) dt$. The use of this theorem together with known

properties of symbolic representations and known symbolic representations, enables the author to deduce easily such formulas as

$$\int_0^x J_\mu(t) J_\nu(x-t) dt/t = J_{\mu+\nu}(x)/\mu$$

and

$$\int_0^x J_\mu(t) \sin(x-t) dt = -2\mu \sum_0^\infty (-1)^r J_{\mu+1+2r}(x) + x J_{\mu+1}(x)$$

as well as many other integrals involving Bessel functions in a similar way.

Hildebrandt (Ann Arbor).

Bailey, W. N.: On the solutions of some integral equations. J. London Math. Soc. 6, 242—247 (1931).

Various results are established concerning homogeneous integral equations whose kernel is of the form $K(xt)$, and, in particular, concerning self-reciprocal functions for Hankel's transforms. A typical result is as follows: If $f(x)$ is a solution of the integral equation $f(x) = \int_0^\infty K_1(xt) f(t) dt$, and $G(x)$ is such that $x^{-1/2} F(x) = \int_0^\infty K_1(xt) G(t) dt$, $x^{-1/2} F(1/x) = \int_0^\infty K_2(xt) G(t) dt$, then $g(x) \equiv \int_0^\infty t^{-1/2} F(t) f(xt) dt$ is a solution of the integral equation $g(x) = \int_0^\infty K_2(xt) g(t) dt$. The method of procedure is purely formal and no attempt is made to state the conditions of validity of the results obtained.

J. D. Tamarkin (Providence).

Goldstein, S.: Note on the operational solution of an integral equation. J. London Math. Soc. 6, 262—268 (1931).

The author uses the Heaviside operational calculus, and the fact that if $\varphi(p)$ is the representation of $f(t)$ and $\psi(p)$ of $g(t)$ then $\varphi(p)\psi(p)/p$ is the representation of $\int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau$ for the solution of integral equations. In the first instance, from aerodynamics, the equation solved is $F(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau$ with

$$F(t) = \sum_1^4 A_n e^{i\lambda_n t} + E, \quad f(t) = \sum_1^4 B_n e^{i\lambda_n t}.$$

In the second, from mathematical economics, the equation is $1 = f(t) + \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau$ with $f(t) = 1 - t/T$ for $t < T$ and 0 for $t > T$.

Hildebrandt (Ann Arbor).

Carathéodory, Constantin: Über die Existenz der absoluten Minima bei regulären Variationsproblemen auf der Kugel. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. e mat., II. s. 1, 79—87 (1932).

Es sei F der Integrand eines auf der Kugel überall regulären Variationsproblems. Dann verlangt das Problem des absoluten Minimums, unter allen rektifizierbaren sphärischen Kurven, die zwei Punkte A und B der Kugel verbinden, eine solche zu finden, daß das Integral über F längs dieser Kurve ein Minimum wird. Um für die Lösbarkeit dieses Problems ein neues Kriterium zu erhalten, wird eine Funktion $\varepsilon(P, Q)$ eingeführt, die so definiert wird: P, Q seien zwei verschiedene Punkte der Kugel; $\gamma(P, Q)$ eine geschlossene rektifizierbare (sphärische) Kurve, die durch P und Q geht. Dann ist $\varepsilon(P, Q)$ die untere Grenze von $\int_{\gamma(P, Q)} F dt$ für alle möglichen $\gamma(P, Q)$. Über diese Funktion $\varepsilon(P, Q)$ werden im wesentlichen die folgenden Sätze bewiesen: 1. $\varepsilon(P, Q) \geq 0$ für alle P, Q ist notwendig, damit für zwei Punkte A und B das Problem des absoluten Minimums lösbar ist. 2. $\varepsilon(P, Q) > 0$ ist hinreichend für die Lösbarkeit dieses Problems. 3. $\varepsilon(P, Q) \geq 0$ ist nicht hinreichend.

F. Rellich (Göttingen).

Tonelli, Leonida: Sull'esistenza del minimo in problemi di calcolo delle variazioni.

Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. e mat., II. s. 1, 89—99 (1932).

Es wird ein Kriterium, das C. Carathéodory für die Existenz der absoluten Minima bei regulären Variationsproblemen auf der Kugel ausgesprochen hat (vgl. vorangehendes Referat), auf Variationsprobleme mit quasiregulär positiv seminormalem Integral erweitert. (Zur Terminologie siehe L. Tonelli: Fondamenti di Calcolo delle Variazioni, Vol. I, p. 224). In derselben Richtung wird eine Verallgemeinerung eines Satzes von H. Hahn [H. Hahn: Über ein Existenztheorem der Variationsrechnung. Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien, Math.-naturwiss. Kl. 134, 437 (1925)] gegeben.

Rellick (Göttingen).

Mandelbrojt: Généralisation d'un théorème sur les fonctions holomorphes dans un demi-plan. C. R. Acad. Sci. Paris 193, 1056—1058 (1931).

L'auteur donne d'abord cette généralisation du th. III de son mémoire du Bull. sci. math. 55, 303 (voir Zbl. 2, 400): Si $F(z)$ et $\theta(z)$, $z = x + iy$, sont deux fonctions holomorphes pour $x \geq 0$, si

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log |F(x)|}{x} = d, \quad (0 < d < +\infty); \quad (1)$$

$$|F(z)| < e^{Kx} |\theta(z)|, \quad x \geq 0 \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log |\theta(x)|}{x} = l < d, \quad |\theta(z)| > r > 0, \quad x \geq 0; \quad (2)$$

$$\left| \frac{F^{(n)}(iy)}{\theta(i\tau y)} \right| < m_n \quad (1 \leq \tau < \infty, \quad -\infty < y < +\infty), \quad (3)$$

on a
$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{m_n} > 0. \quad (4)$$

L'hypothèse (3) remplace l'inégalité $|F^{(n)}(iy)| < m_n$ du mémoire, la démonstration, qui utilise la théorie des fonctions quasi-analytiques, reste la même que dans le mémoire. — Il démontre ensuite que, dans le cas où $\theta(z) = M = \text{const}$, en conservant (1) et (2) (qui se simplifie) et en remplaçant (3) par

$$|F^{(n)}(x_n + iy)| < m_n \quad -\infty < y < +\infty, \quad x_{n+1} \geq x_n \geq 0, \quad (5)$$

la conclusion (4) reste valable, on a même

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{m_n}{1+x_n}} > 0.$$

Mand. signale que Izumi (Tohoku J. 33, 127), généralisant un th. de Landau, a obtenu un résultat qui conduit au précédent lorsque $x_n = 0$, moyennant la seule hypothèse (5) et $F(z) \equiv 0$. Ceci pose la question de savoir si les hypothèses faites ci-dessus, nécessitées par le mode de démonstration, sont bien indispensables. Mand. montre que (1) ne saurait être supprimée complètement; mais les exemples donnés ne concernent que des fractions rationnelles et laissent encore ouverte la question du remplacement possible de (1) par une condition plus large.

G. Valiron (Paris).

Denjoy, Arnaud: Sur un théorème de Wiman. C. R. Acad. Sci. Paris 193, 828—830 (1931).

Eine ganze Funktion $F(z)$ vom Geschlecht 0 habe die Nullstellen a_1, \dots, a_n, \dots mit $|a_n| = r_n$. Setzt man

$$G(r) = \prod_1^\infty \left| 1 - \frac{r}{r_n} \right|, \quad H(r) = \prod_1^\infty \left(1 + \frac{r}{r_n} \right)$$

und konvergiert die Reihe $\sum \frac{1}{r_n^\alpha}$ ($0 < \alpha < 1$), so gilt die Ungleichung

$$r^\alpha \int_r^\infty [\log G(u) - \cos \pi \alpha \log H(u)] \frac{du}{u^{1+\alpha}} > h(\alpha) \log H(r),$$

wobei $h(\alpha) > 0$.

Daraus folgt: 1. Es gibt Werte $u > r$, so daß $\log G(u) > \cos \pi \alpha \cdot \log H(u)$; 2. Wenn $\alpha = \frac{1}{2}$ ist, gilt $\lim G(u) = \infty$. Beachtet man, daß der Minimalmodul $\mu(r) \geq G(r)$ und der Maximalmodul $M(r) \leq H(r)$, so erhält man bekannte Sätze von Wiman. Der bemerkenswerteste von den Wimanschen Sätzen, nämlich daß der Minimalmodul von demselben Wachstumsordnung ist wie der Maximalmodul, ist aber hierdurch noch nicht bewiesen. *Ahlfors (Paris).*

Calugaréano, Georges: Sur la condition nécessaire et suffisante pour l'univalence d'une fonction holomorphe dans un cercle. C. r. Acad. Sci. Paris **193**, 1150—1152 (1931).

De la remarque que la condition nécessaire et suffisante pour l'univalence de

$$f(z) = \sum a_n z^n \text{ dans } |z| < R \text{ est } 1. a_1 \neq 0, \quad 2. \Psi(u, v) = \log \left[\frac{f(u) - f(v)}{u - v} \right]$$

est holomorphe lorsque $|u| < R$, $|v| < R$, l'auteur tire une expression pour le rayon d'univalence R_v de $f(z)$:

$$\frac{1}{R_v} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\alpha_{n,0}| + |\alpha_{n,1}| + \dots + |\alpha_{0,n}|}$$

où l'on pose $\Psi(u, v) = \log a_1 + \sum_m \left(\sum_{p+q=m} \alpha_{pq} u^p v^q \right)$. *Mandelbrojt (Clermont-Ferrand).*

Calugaréano, Georges: Sur un complément au théorème de M. Borel. Bul. Soc. Sti. Cluj **6**, 299—304 (1931).

Ergänzende Bemerkungen zu einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. **2**, 214) über die Verallgemeinerung des Satzes von Borel in der Theorie der meromorphen Funktionen. *Ahlfors (Paris).*

Maier, W.: Theorie der s -Funktion. J. f. Math. **166**, 101—115 (1931).

In den beiden letzten Kroneckerschen Mitteilungen zur Theorie der elliptischen Funktionen spielt eine von Kronecker mit Ser, von Maier mit dem einfachen Zeichen s bezeichnete Funktion eine ausgezeichnete Rolle. Sie ist nach der von Hermite eingeführten Terminologie eine elliptische Funktion zweiter Art mit genau einem Pol erster Ordnung im Periodenparallelogramm. Genauer: Es seien $\omega_1, \omega_2, u, x, y$ komplexe Zahlen, die den Bedingungen $\omega_1 \neq 0$, $J \binom{\omega_2}{\omega_1} \neq 0$, $\omega_1 y - \omega_2 x \not\equiv 0 \pmod{\omega_1, \omega_2}$ genügen; dann ist

$$s \binom{x, y}{u; \omega_1, \omega_2} = s \binom{x, y}{u} = s(u)$$

eindeutig bestimmt durch die Forderungen: $s(u)$ soll eine meromorphe Funktion sein, die, $u = \omega_1 u_1 + \omega_2 u_2$ mit reellen u_1, u_2 gesetzt, für $|u_1| < \frac{1}{2}$, $|u_2| < \frac{1}{2}$ die Gestalt $s(u) = \frac{1}{u} + O(1)$ hat und überdies die Periodizitätseigenschaften

$$s(u) = e^{2\pi i x} s(u + \omega_1), \quad s(u) = e^{2\pi i y} s(u + \omega_2)$$

besitzt. Diese Funktion besitzt die schon in Kroneckers Untersuchungen grundlegende, nur bedingt konvergente Partialbruchdarstellung

$$s(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{0 < h^2 + k^2 < n} \frac{e^{2\pi i(xh + yk)}}{u + \omega_1 h + \omega_2 k}.$$

Die Funktion $s(u)$ führt, worauf ebenfalls schon Kronecker hingewiesen hat und was dann vom Verf. in früheren Arbeiten ausgebaut wurde, zu einem rationellen Aufbau der Theorie der elliptischen Funktionen und Modulfunktionen. Aber sie weist „in inhaltlicher und methodischer Hinsicht über die klassische Theorie von Weierstrass hinaus. Inhaltlich durch neue Ergebnisse wie die Orthogonalität der s -Funktion, welche die belastete Orthogonalität der Jacobischen ϑ -Funktion nach sich zieht. Methodisch durch Verknüpfung dieser Tatsachen, die zunächst dem Gedankenkreise der Laméschen Differentialgleichung angehören, mit geometrischen Operationen im dreidimensionalen Raum, weiterhin mit der Theorie der Differenzengleichungen und analytischen Funktionen zweier Argumente“. Die vorliegende Arbeit bringt „im Abriß

solche Erscheinungen im Gebiet der s -Funktion zur Darstellung, die zu bekannten Aussagen über orthogonale Funktionensysteme parallel laufen. An Stelle des algebraischen Additionstheorems, dessen zentrale Bedeutung für die doppelperiodischen Funktionen durch Weierstrass herausgestellt wurde, tritt ferner ein quadratischer „Additionssatz“, der Argumenttripler transformiert und die s -Funktion kennzeichnet. Aus ihm läßt sich algebraisch die Multiplikationstheorie der s -Funktion entwickeln, während in § 7 unmittelbar auf die Doppelreihen zurückgegriffen wird, um daraus entsprechend dem Vorgang von Eisenstein und Hurwitz die Modulfunktionen zu konstruieren. Deren Transformation wird durch die benutzte Erzeugungsweise in Evidenz gesetzt.“ *Bessel-Hagen* (Bonn).

Marty, F.: Sur l'itération de certaines fonctions algébriques. C. r. Acad. Sci. Paris 193, 1317—1318 (1931).

Eine Funktion wird zyklisch genannt, wenn bei der Iteration derselben für jeden Punkt nur endlich viele verschiedene Bildpunkte erhalten werden. Ferner wird unter einer „Funktion der Automorphie“ einer gegebenen Funktion $f(z)$ jede der Gleichung $f(H(z)) = f(z)$ genügende Funktion $H(z)$ verstanden. Nach dem Verf. gilt der Satz, daß, wenn eine algebraische Funktion $Z(z)$ zyklisch ist, so gibt es eine rationale Funktion, welche die Funktion $Z(z)$ und ihre Iterierten als einzige Funktionen der Automorphie besitzt. — Die zur rationalen Funktion $R(z) = P(z)/Q(z)$ gehörige Funktion $Z(z)$ kann implizite durch die Gleichung

$$\Pi(Z, z) = \frac{P(Z)Q(z) - Q(Z)P(z)}{Z - z} = 0$$

dargestellt werden. Es werden gewisse die Funktion $\Pi(Z, z)$ betreffende Sätze ohne Beweis mitgeteilt, u. a., daß die genannte Funktion nur unter speziellen, durch Gleichungen zwischen den in der Funktion auftretenden Parametern darstellbaren Bedingungen reduzibel sein kann. *Myrberg* (Helsinki).

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Versicherungsmathematik:

● **Winkler, Wilhelm:** Grundriß der Statistik. I. Theoretische Statistik. (Enzyklopädie d. Rechts- u. Staatswiss. Begr. v. F. von Liszt u. W. Kaskel. Hrsg. v. E. Kohlrausch, H. Peters u. A. Spiethoff. Abt. Staatswiss. Hrsg. v. Arthur Spiethoff. Liefg. 46.) Berlin: Julius Springer 1931. IX, 177 S. u. 22 Abb. RM. 10.80.

Diese Einführung in die Statistik wendet sich in erster Linie an die Studierenden der Nationalökonomie. Dementsprechend werden nur solche mathematischen Hilfsmittel herangezogen, die aus dem Schulunterricht als bekannt angesehen werden dürfen. Im Rahmen der dadurch bedingten Beschränkung (u. a. Verzicht auf Beweise) gibt Verf. eine einheitliche Darstellung ohne die vielfach übliche Trennung in mathematische und „allgemeine“ Statistik. Aus dem Inhalt: Einleitende Schilderung der statistischen Organisation, Quellen und Erhebungen. Definition der statistischen Maße. Wesentliche und Zufallsstreuung. Inhalt und Bedeutung des Gesetzes der großen Zahl. Dispersionstheorie. Definition verschiedener Mittelwerte und Streuungsmaße und Diskussion ihrer Bedeutung in Praxis und Theorie. Diskussion der Normalkurve (Gauss'sche Verteilung) und anderer häufig auftretender Kurven. Ausgleichsverfahren. Statistische Verhältniszahlen. Korrelationstheorie. Zahlreiche aus der Praxis entnommene Beispiele und Aufgaben. *W. Fenchel* (Göttingen).

De Finetti, Bruno: Sul significato soggettivo della probabilità. Fundam. Math. (Warszawa) 17, 298—329 (1931).

Der Verf. betrachtet die sonst übliche Definition der Wahrscheinlichkeit durch die Anzahl der günstigen und ungünstigen gleichmöglichen Fälle als ungenügend; nach seiner Ansicht soll die Definition der Wahrscheinlichkeit notwendig mit dem Begriffe der mathematischen Erwartung verbunden sein, und zwar folgenderweise: Eine Erscheinung E hat die Wahrscheinlichkeit p , wenn es gleich vernünftig ist, $1 - p$ Lire gegen p für E und p Lire gegen $1 - p$ für die entgegengesetzte Erscheinung zu wetten. Verf. beweist, daß aus dieser Definition alle Grundgesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung folgen. *A. Kolmogoroff* (Moskau).

Fréchet, Maurice: Nouvelles expressions de la „distance“ de deux variables aléatoires et de la „distance“ de deux fonctions mesurables. Roczn. polsk. towarz. mat. 9, 45—48 (1931).

Note de M. Maurice Fréchet relative à son mémoire: Nouvelles expressions de la „distance“ de deux variables aléatoires et de la „distance“ de deux fonctions mesurables. Roczn. polsk. towarz. mat. 9, 49 (1931).

Man setzt voraus, daß die Funktion $b(x)$ folgenden Bedingungen genügt: $b(0) = 0$, $b(x)$ ist monoton wachsend und beschränkt für alle $x \geq 0$, $b(x + y) \leq b(x) + b(y)$. Es seien sodann X und Y zwei zufällige Größen; die mathematische Erwartung $\varrho(X, Y)$ der Größe $b|X - Y|$ ist immer endlich und genügt, als Entfernung im Raume von allen zufälligen Größen betrachtet, den drei Axiomen des metrischen Raumes. X_n konvergiert „au sens du calcul de probabilité“ gegen X dann und nur dann, wenn $\varrho(X_n, X)$ gegen Null konvergiert (Satz von Slutsky). Ein analoger Entfernungsbegriff $\varrho(f, g) = \int b|f - g| dx$ wurde für meßbare Funktionen von Noaion und Lévy eingeführt [Bull. Sci. Math. 49, S. 377 ff. §§ 7, 8 (1925)]. A. Kolmogoroff (Moskau).

Willers, Fr. A.: Korrelation zwischen drei Veränderlichen. Skand. Aktuarietidskr. 14, 158—166 (1931).

Im Skand. Aktuarietidskr. 13, 196ff (1930) zeigte Hagstroem, daß $r = \cos m \cdot \pi$, wo r der Korrelationskoeffizient und m die Summe der relativen Häufigkeiten zwischen den beiden Regressionskurven ist, gleichgültig, ob sie geradlinig sind oder nicht. — Fr. A. Willers sucht eine entsprechende Relation für 3 stochastisch verbundene Veränderliche zu gewinnen. Er beginnt mit dem Beweis im Falle normaler Häufigkeitsverteilung und führt diesen durch Aufstellung der 3 Gleichungen der Regressionsebenen und durch Integration der Verteilungsfunktion zwischen den Regressionsebenen als Grenzen. — Um die Integration auszuführen, werden solche Variable eingeführt, daß die Flächen konstanter Häufigkeit in Kugeln transformiert werden, weil man so erreicht, daß das Verhältnis der Summe der von den beiden Ebenen eingeschlossenen relativen Häufigkeiten zur Summe sämtlicher relativen Häufigkeiten gleich ist dem des Winkels zwischen diesen Ebenen zu π . Unsere Aufgabe ist also darauf reduziert, diesen Winkel zu bestimmen. Das Resultat ist

$$\cos(I, II) = \mp \frac{r_{12} - r_{13} \cdot r_{32}}{\sqrt{(1 - r_{13}^2)(1 - r_{32}^2)}}$$

und analoge Relationen für $\cos(I, III)$ und $\cos(II, III)$. — Wenn wir das untere Vorzeichen wählen, haben wir gerade $r_{12, 3}$, $r_{23, 1}$ und $r_{31, 2}$ (die partiellen Korrelationskoeffizienten), und dann werden die Relationen der Hagstroems entsprechen (wenn man die Summe der relativen Häufigkeiten zwischen I und II mit $m_{I, II}$ bezeichnet). — Im Falle von nicht normaler Korrelation kann man ein entsprechendes $\varrho_{12, 3} = \cos(\mu_{12} \cdot \pi)$ einführen, indem man mit μ_{12} die Summe der relativen Häufigkeiten zwischen den beiden Regressionsflächen versteht. $\varrho_{12, 3}$ kann als ein Maß für die Strammheit des Zusammenhangs bezeichnet werden, und durch Teilung der relativen Häufigkeiten in Gruppen und Anwendung der Simpsonschen Regel zur Volumenberechnung (das Verhältnis gewisser Gruppen von relativen Häufigkeiten ist gleich dem gewisser Volumengrößen) ist es möglich, die μ_{ik} mit ausreichender Genauigkeit zu berechnen. — Für den totalen Korrelationskoeffizient R haben wir $1 - R_1^2 = (1 - r_{13}^2)(1 - r_{12, 3}^2)$ und können analog wie oben ein P_1^2 finden, das einen allgemeinen Zusammenhang charakterisiert. — Es ist ferner möglich, eine Zahl zu finden, die ein Maß für die Strammheit des Zusammenhangs aller 3 Variablen ist. — Durch Betrachtungen ähnlichen Charakters wie diejenigen, die zu $r_{12, 3} = \cos(m_{I, II} \cdot \pi)$ führten, gelingt es so ein allgemeines Maß für die Strammheit zu bestimmen, nämlich $C = \cos(2 \cdot M \cdot \pi)$, wo M bei normaler Korrelation die Summe der relativen Häufigkeiten, die in den kleinsten räumlichen Eckenpaaren liegen, die von den Regressionsebenen gebildet werden, darstellt. — Das Strammheitsmaß läßt sich bei passender Definition von M auch im Falle nicht normaler Korrelation anwenden.

Christensen (Kopenhagen).

Heywood, H. B.: On finite sequences of real numbers. Proc. roy. Soc. Lond. A 134, 486—501 (1931).

Für endliche Zahlenfolgen wird eine Theorie entwickelt, die eine gewisse Analogie zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme bietet. Insbesondere bedeutet die Orthogonalität zweier (zentrierter) Zahlenfolgen das Verschwinden ihres Korrelationskoeffizienten. Als Anwendung wird die Aufgabe der Auffindung einer Reihe von Zahlenfolgen mit vorgegebenem Schema der Korrelationskoeffizienten betrachtet. Besonders eingehender Diskussion wird der Spearmansche Spezialfall unterworfen, in

welchem das Schema der Korrelationskoeffizienten gewisse Proportionalitätseigenschaften besitzt.

A. Khintchine (Moskau).

Kołodziejczyk, Stanisław: *La vérification de l'hypothèse sur la constance des probabilités.* (*Labor. Biométri., Inst. Nencki, Varsovie.*) *Roczn. polsk. towarz. mat.* **9**, 60—71 (1931).

Es seien s Serien gegeben, welche n_1, n_2, \dots, n_s Versuche enthalten, k_i sei die Zahl von Versuchen aus der i -ten Serie, bei welchen das Ereignis E stattgefunden hat. Verf. bestimmt die „Vraisemblance“ λ_H (dieser Begriff stammt von J. Neyman und E. S. Pearson) der Hypothese H , daß die Wahrscheinlichkeit von E in allen Serien dieselbe war:

$$\lambda_H = \frac{q_0^k (1 - q_0)^{n_0 - k_0}}{q(1 - q)},$$

$$q_i = k_i/n_i, \quad q_0 = k_0/n_0, \quad k_0 = \sum_{i=0}^s k_i, \quad n_0 = \sum_{i=0}^s n_i.$$

Der Lexissche Dispersionskoeffizient D ist mit der „Vraisemblance“ durch die asymptotische Gleichung $-2 \log \lambda_H = (s - 1) D^2$ (bei großem n_0) verbunden. Verf. gibt noch einen Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit der Ungleichung $\lambda_H > \lambda_0$.

A. Kolmogoroff (Moskau).

Doresamiengar, M. R.: *Taxation as an instrument for modifying inequalities in distribution.* *J. indian math. Soc.* **19**, 81—87 (1931).

The paper aims to give a mathematical description or characterization of the manner in which taxation by a Federal or Central body tends to modify inequalities in the distribution of wealth. Much use is made of a ratio D'/D , where D is the divergence of actual economic welfare from the ideal one, and D' is the corresponding divergence appropriate to the distribution when the income X changes to X' as a result of taxation. A functional relation between income x and welfare given by $k\sqrt{x}$ is selected with some very general reasons for this choice, then D'/D is expressed in terms of income and certain parameters. A mathematical study is made of the change in the value of the ratio D'/D as dependent on taxation.

H. L. Rietz (Jowa).

Spoerl, Charles A.: *Actuarial note. Henderson's graduation formula B.* (*New York, 21.—22. V. 1931.*) *Trans. actuar. Soc. Amer.* **32**, 60—72 (1931).

This paper develops certain parts of the theory that underlies the Henderson graduation formula *B*. The graduation in question is based on making the function

$$a(\Delta^2 u_0)^2 + \sum_0^{n-3} (\Delta^3 u_x)^2 + k \sum_0^n E_x \left(u_x - \frac{\Theta_x}{E_x} \right)^2 \quad (1)$$

a minimum, Henderson used in practice the special case $a = \frac{1}{10}$ to obtain satisfactory results. Spoerl makes a critical examination of (1) for various values of a . He finds that the function of the a -term is to modify the lower end of the table to make it fit with preconceived ideas as to a mortality table at younger ages. An investigation is made also to determine the effect on the graduation of different values of k in (1) and, in particular, of the value $k = 0$. Thus, the variations in the graduation are examined for change in a of (1) both when $k = 0$ and when $k \neq 0$.

H. L. Rietz (Jowa).

Stark, Herbert J.: *Methods for valuation of deferred annuities issued under group contracts.* (*New York, 21.—22. V. 1931.*) *Trans. actuar. Soc. Amer.* **32**, 8 bis 30 (1931).

This paper presents the general procedure of one company in the valuation of various type of deferred annuities issued under group contracts. The procedure is discussed first in relation to the following three types of annuities: (1) annuity with no death benefit prior to normal retirement age, (2) annuity with death benefit prior to normal retirement age equal to the return of the gross consideration paid without interest, (3) annuity with death benefit prior to normal retirement age equal to the

return of the gross consideration paid with compound interest at a specified rate. — Another type of benefit is considered consisting of a death benefit after normal retirement based on total consideration received less annuity payments. Some useful approximate formulas are developed from the retrospective point of view. In particular, a combination of the above three types called a retirement annuity received special attention, and the procedure is shown by which its valuation is carried out. In conclusion, it is indicated that the merits and demerits of many points in the application of the method are not settled. For example, the Hollerith card system has been applied to the larger groups in force, but it has not yet been decided whether it will be used for all the smaller ones. The hope is expressed that it will eventually be found possible to include the valuation of all deferred annuity benefits in one composite Hollerith card procedure.

H. L. Rietz (Jowa).

Sachs, Carl Wolfgang: Annäherungsverfahren in der Lebensversicherungstechnik. Bl. Versich.math. (Beil. d. Z. Versich.wiss. 31) 2, 183—196 (1932).

Bei dem Versuche, die Funktion für die Rentenbarwerte $a_v(x, n)$ zu approximieren, wird Sachs auf zwei verschiedenen Wegen zu der Näherung $D_x = k^x$ geführt, die zwar für die Beantwortung seiner ursprünglichen Fragestellung ungeeignet ist, aber nach numerischen Beispielen zur Reservenberechnung näherungsweise geeignet zu sein scheint. Die Frage, wann die Relation ${}_mV : (1 - da_{x+m, n-m}) = m : n$ genau gilt, führt zu einfachen Näherungsformeln für die Rentenbarwerte. Von der Annahme $C_x = \text{konst.}$ ausgehend gelangt man zu einer scheinbar brauchbaren approximativen Darstellung von D_x .

F. Knoll (Wien).

Lenzi, Enrico: Problemi sulle rendite vitalizie e loro risoluzione. Giorn. Ist. ital. Attuari 2, 481—492 (1931).

Christensen, Kaj: Some sources of error in tables of invalidity. Skand. Aktuarietidskr. H. 4, 238—252 (1931).

Schönwiese, Rudolf: Mathematik des Bausparens. Bl. Versich.math. (Beil. d. Z. Versich.wiss. 31) 2, 169—183 (1932).

Nach einer knappen Darstellung der mathematisch wichtigen Fragen der Technik der Bausparkassen wendet sich Schönwiese der Untersuchung der Grundprobleme zu, die bei Bausparkassen, welche nach dem offenen System arbeiten, auftreten. Er setzt voraus, daß ein einziger Tarif vorliege, daß die Zuteilung nach dem Listensystem erfolge, und daß man von der Einhaltung einer Mindestwartezeit absehe. Die Formeln werden nach dem kontinuierlichen Verfahren abgeleitet. Gemischte Systeme, bei welchen noch andere Gelder verwendet werden, die nicht von Sparern der Kasse stammen, werden nicht in die Untersuchung einbezogen. Weiter wird angenommen, daß bis zur Zuteilung die Bausparsumme als verzinsliches Darlehen gegeben wird. Entsprechend der angewendeten Methode wird der Zugang als kontinuierlich vorausgesetzt. Drei Grundtypen werden studiert und insbesondere hinsichtlich der auftretenden Wartezeit eingehend analysiert. 1. Die jährliche Sparprämie wird während der ganzen Zeit der Zugehörigkeit zur Kasse bezahlt, nach Zuteilung der Bausparsumme wird überdies Zins gezahlt; 2. außer der jährlichen Sparprämie wird am Anfang eine einmalige Zahlung geleistet; 3. außer der jährlichen Sparprämie wird nach der Zuteilung der Sparsumme neben Zins noch ein jährlicher Tilgungsbeitrag eingehoben. In jedem dieser Fälle wird einerseits der Sonderfall gleichmäßigen Zugangs, andererseits das gleichartige Problem für zinslose Bausparkassen behandelt.

F. Knoll (Wien).

Geometrie.

Heiseler, Artur: Eine einfache Methode zur approximativen Rektifikation des Kreisperipherie. Commentationes phys.-math. Soc. Sci. fenn. 5, Nr 17, 1—5 (1931).

Da $\frac{1}{3}(\sqrt{141} - \sqrt{6}) = 3,141617 \dots$ ist, andererseits $\frac{1}{3}(\sqrt{141} - \sqrt{6}) = \sqrt{4^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} - \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}$ gilt, so läßt sich aus der letzten Formel leicht eine einfache und

sehr genaue Approximation des Kreisumfanges konstruieren.

O. Neugebauer.

Pelosi, Luisa: Sulle corde massime e minime normali ad un'ipersuperficie. Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. 14, 322—325 (1931).

Die Note beschäftigt sich mit der folgenden elementaren Extremalaufgabe: In der Ebene seien zwei Kurven φ und ψ gegeben. Unter den Normalen von φ sind die zu bestimmen, für die das zwischen φ und ψ liegende Stück extremale Länge r besitzt. Es zeigt sich: Diese Normalen von φ sind entweder gleichzeitig Normalen von ψ , oder r ist gleich dem Krümmungsradius von φ im betreffenden Punkt. Das Entsprechende gilt für zwei Hyperflächen Φ und Ψ des $n+1$ -dimensionalen euklidischen Raumes. Im zweiten der genannten Fälle tritt dann an Stelle des Krümmungsradius von φ einer der Hauptkrümmungsradien von Φ .

W. Fenchel (Göttingen).

Nolfi, P.: Die geometrischen Komponenten. (Ein Beitrag zur Punkt- und Vektorrechnung.) Commentarii math. helvet. 3, 245—261 (1931).

So wie jedem Punkt- oder Vektorgebilde eine gewisse Anzahl von Zahlenwerten als Komponenten (meist Koordinaten) zugeordnet werden, lassen sich ihm auch „geometrische Komponenten“, die ähnliche Eigenschaften besitzen, aber keine Zahlen mehr sind, zuordnen. Die Arbeit führt dies durch und zeigt auch Anwendungen auf Geometrie und Physik. — Ist ε eine Einheit r -ter Stufe in einem projektiven Hauptgebiet n -ter Stufe, so heißt ε' die ergänzende Einheit (Ergänzung) $(n-r)$ -ter Stufe, wenn $[\varepsilon\varepsilon'] = 1$ ist. Ist dann A eine geometrische Größe (Extense), so heißt $[A\varepsilon']$ eine Komponente von A . Sie ist im allgemeinen eine geometrische Komponente, nur wenn A und ε Extensen gleicher Stufe sind, eine Zahl.

L. Schrutka (Wien).

Bennett, A. A.: The distributive laws for homogeneous linear systems. Bull. amer. math. Soc. 37, 766—770 (1931).

Let a and b be homogeneous linear systems (linear projective spaces) subject to certain restrictions, ab their intersection and $a+b$ their join. The spaces are distributive in the first (second) sense according as I (II) holds: I: $a(b+c) = ab+ac$, II: $a+bc = (a+b)(a+c)$. It is proved that if three spaces a, b, c are such that I or II holds, then both hold; and that if I holds, it holds with a and b interchanged.

MacDuffee (Columbus).

Mentré, Paul: Sur l'application projective d'un complexe quadratique sur le complexe linéaire non spécial. C. r. Acad. Sci. Paris 193, 1315—1316 (1931).

Gegenstand der Untersuchung ist ein spezieller quadratischer Komplex G , Ort von ∞^1 linearen Kongruenzen, deren Leitlinien zwei bewegliche Geraden in zwei projektiven Geradenbüscheln sind; die Ebene des einen Büschels enthält den Mittelpunkt des anderen; der Verbindungsgeraden der beiden Mittelpunkte, als Gerade des ersten Büschels betrachtet, entspricht im anderen Büschel die Schnittgerade der Ebenen der beiden Büschel. Der Komplex G ist auf einen nicht speziellen linearen Komplex g projektiv deformierbar; die Korrespondenz zwischen G und g wird geometrisch realisiert.

Čech (Brno).

Morton, V. C., and Dorothy S. Meyler: Quadrics and quadric cones of a set of three associated Steiner trihedral pairs. Proc. Lond. math. Soc., II. s. 33, 177 bis 189 (1931).

Die 27 Geraden einer kubischen Fläche werden auf 3 „assozierte“ Steinersche Triederpaare I, II, III verteilt. Mit dieser Figur werden zwei Familien von je 9 Flächen 2. Ordnung und 45 Kegel 2. Ordnung auf folgende Weise in Verbindung gebracht: Läßt man ein Triederpaar, etwa I, fort, so lassen sich die auf den beiden übrigen gelegenen 18 Geraden:

$$\text{II} \begin{Bmatrix} 2_1 & 2_2 & 2_3 \\ 4_1 & 4_2 & 4_3 \\ 6_1 & 6_2 & 6_3 \end{Bmatrix}, \quad \text{III} \begin{Bmatrix} 1_1 & 3_1 & 5_1 \\ 1_2 & 3_2 & 5_2 \\ 1_3 & 3_3 & 5_3 \end{Bmatrix}$$

zu 3 mit I verbundenen Doppelsechsen zusammenfassen. Im ganzen entstehen 9 Doppelsechsen, und ihre Schurschen F^2 bilden die erste der genannten Flächenfamilien. Ferner sind die Geraden:

$$\begin{pmatrix} 1_r & 3_r & 5_r \\ 2_r & 4_r & 6_r \end{pmatrix} \quad (r = 1, 2, 3)$$

6 Erzeugende einer von 3 mit I verbundenen Fläche 2. Ordnung $S_r^{(1)}$. Die so entstehenden Flächen, wiederum im ganzen 9, bilden die zweite Flächenfamilie. Die $3 \cdot 18 = 54$ Kegel 2. Ordnung endlich sind folgendermaßen definiert: Scheitel eines zu I gehörigen Kegels ist einer der 18 Punkte, in denen sich die 9 Geraden des Triederpaares I schneiden. Der Kegel enthält die beiden durch seinen Scheitel laufenden Geraden der Fläche und außerdem 4 der 16 „edges“ des Punktes (edge = Schnittgerade der Ebenen von 2 aus Geraden der Fläche gebildeten Dreiecken). Der Hauptsatz, der (neben vielen anderen) den Zusammenhang zwischen den 3 Flächenfamilien herstellt, lautet: Durch die Schnittkurve von 2 der 9 Schurschen F^2 laufen 2 der 54 Kegel. Jeder von diesen enthält außerdem je 2 kubische Raumkurven, die als Restschnitte gewisser Flächen der Familie S erklärt sind. Apolaritäts- und andere invariante Beziehungen zwischen den Schurschen F^2 . Gemeinsames Polartetraeder von 2 Schurschen F^2 . E. A. Weiss (Bonn).

Jacques: Sur les réseaux dont les tangentes appartiennent à des complexes linéaires et les surfaces non euclidiennes à courbure totale constante. C. r. Acad. Sci. Paris 193, 1312—1314 (1931).

Les réseaux désignés au titre ont été étudiés par E. J. Wilczynski [»Sur la théorie générale des congruences« Mém. Acad. Sci. Belgique sér. 2 t. 3 (1911)]. Les transformés de Laplace sont de la même espèce et correspondent par leurs asymptotiques. La détermination du réseau est équivalente à la détermination d'une surface pseudosphérique. M. Demoulin a montré [Bull. Acad. Sci. Belgique Nr 12, p. 1189 (1909)] qu'il est possible d'en déduire par des transformations géométriques des surfaces à courbure moyenne non euclidienne constante. La Note référée en donne la relation avec les surfaces non euclidiennes à courbure totale constante. En partant du système de la détermination du réseau (x_i) dans la forme que l'auteur a donnée antérieurement [C. r. Acad. Sci. Paris 184, 577 (1927)]

$$x_i = q \xi_i + r \eta_i, \quad (i = 1, 2), \quad \frac{\partial x_3}{\partial u} = r^2 e^{2\varphi} \frac{\mu^2 - \lambda^2}{\lambda^4}, \quad \frac{\partial x_3}{\partial v} = q^2 e^{2\varphi} \frac{\mu^2 - \lambda^2}{\mu^4}$$

où φ est une solution de l'équation qui détermine l'angle des asymptotiques sur la surface pseudosphérique, ξ_i, η_i, q, r sont donnés par certains systèmes complètement intégrables à dérivées partielles du premier ordre et λ, μ sont des constantes, il construit les quantités nouvelles

$$x_i = \frac{q \xi_i}{\mu} + \frac{r \eta_i}{\lambda}, \quad y_i = \frac{q \xi_i}{\mu} - \frac{r \eta_i}{\lambda}, \quad \bar{\xi}_i = -\frac{r \xi_i}{\lambda} + \frac{q \eta_i}{\mu}, \quad \bar{\eta}_i = -\frac{r \xi_i}{\lambda} - \frac{q \eta_i}{\mu}$$

liées par des relations quadratiques et qui permettent de déduire deux combinaisons isotropes et rectangulaires des éléments des différentes lignes d'un déterminant orthogonal d'ordre 4 que l'on peut faire correspondre aux surfaces non euclidiennes en question.

S. Finikoff (Moskau).

Pinte, E.: Sur les congruences de droites et les surfaces parallèles dans l'espace hilbertien. C. r. Acad. Sci. Paris 193, 1309—1311 (1931).

L'auteur poursuit l'étude de la géométrie de l'espace hilbertien dont les bases sont posées par M. Vitali [»Geometria nello spazio hilbertiano« Bologna 1929]. En adoptant la définition de la congruence et du réseau qui est habituelle dans la géométrie euclidienne à n dimensions — il parvient à des résultats qui ont beaucoup de ressemblance avec ceux-ci. Le point P déterminé par une fonction du paramètre t $P = M + wX$ parcourt, le paramètre w variant, une droite. M et X étant des fonctions de deux variables u et v (outre t), la famille des droites qui y correspondent est une congruence si elle

peut être décomposée de deux manières différentes en développables. Les dérivées $\partial M/\partial u$, $\partial M/\partial v$ dépendent linéairement de X , $\partial X/\partial u$, $\partial X/\partial v$, les coefficients étant des fonctions de u , v seulement. La fonction X satisfait une équation linéaire homogène aux dérivées partielles du second ordre par rapport aux variables u , v . La définition de la congruence normale ou parabolique, des réseaux conjugués ou harmoniques à la congruence etc. ne diffère pas de celle de la géométrie ordinaire. La relation entre les congruences et les surfaces parallèles désignée au titre consiste en deux faits: 1° la droite qui joint les points correspondants M et N de deux réseaux parallèles engendre une congruence conjuguée aux réseaux, 2° la droite qui passe par le point M parallèlement à la droite qui joint le point N à un point fixe, engendre une congruence également. Certaines de ces considérations s'étendent à des congruences à n paramètres, c.-à-d. à des systèmes de droites à n paramètres qu'on peut décomposer en n familles de développables à $n-1$ paramètres. Marquons, enfin, une autre génération de la congruence: les points de toutes ses droites forment une variété V_3 réglée, telle que l'espace euclidien tangent reste le même tout le long de chaque génératrice.

S. Finikoff (Moskau).

Pinte, E.: Sur les développées des courbes dans l'espace hilbertien. Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. 14, 244—248 (1931).

1. Der Verf. dehnt die Theorie der Evoluten des gewöhnlichen Raumes auf den Hilbertschen Raum aus, er definiert C' als Evolute einer C , eine Kurve, die die folgende Eigenschaft hat: wenn P und P' zwei entsprechende Punkte auf C und C' sind, so ist die Gerade PP' senkrecht zu C und Berührungslinie von C' . — Wenn $f = f(t, s)$ die C -Determinante (Gleichung von C) ist, ist die C' -Determinante $\varphi(t, s)$ bestimmt durch

$$\varphi = f + \varrho(s) \cdot Y(s), \quad \left(\int_G Y^2 dt = 1 \right) \quad (1)$$

Die Bestimmung des Faktors $\varrho(s)$ ist in anderer Weise geschehen als durch G. Aliprandi (Bollettino della Unione Matematica Italiana 1928, 15 Giugno); der Verf. verwendet die Integralgleichung

$$\int_G \int_{s_0}^s h' f' ds \cdot dt = - \int_G Y_0' f' dt, \quad h = -\frac{1}{\varrho}; \quad Y_0 = Y(t, s_0).$$

Er beweist, daß eine solche Integralgleichung nur eine Lösung hat, und zwar

$$h = \sum_{i=0}^{\infty} h_i k_i, \quad k_0 = 1,$$

wo

$$h_0 = \left[- \int_G Y_0' f'' dt \right]', \quad h_i = \int_G \int_{s_0}^s f'' h_{i-1}' ds \cdot dt.$$

2. Wenn $\psi(t)$ eine punto-funzione des Hilbertschen Raumes ist, so gibt die Schnittlinie der Hyperebene, welche alle Normalen in P an die C -Linien enthält,

$$\int_G (\psi - f) f' dt = 0,$$

mit der benachbarten Hyperebene

$$\int_G (\psi - f) f'' dt = 1$$

als Berührungspunkt auf jeder Normalen (weil $\varphi = f + \varrho Y$ ist) $1/\varrho = -h = \int_G Y f'' dt$.

Setzt man diesen Ausdruck in (1) ein, so ergibt sich die gewöhnliche Gleichung der Evolute in der Ebene.

Aliprandi (Padova).

Douglas, Jesse: Systems of K -dimensional manifolds in an N -dimensional space. (Massachusetts Inst. of Technol., Cambridge [U. S. A.]) Math. Annalen 105, 707—733 (1931).

Ist in einer N -dimensionalen Mannigfaltigkeit X_N (nach der Bezeichnungsweise von J. A. Schouten; Verf. schreibt S_N , was aber gewöhnlich für Riemannsche Mannig-

faltigkeiten konstanter Krümmung verwendet wird) ein solches Kurvensystem gegeben, daß durch je zwei genügend benachbarte Punkte genau eine Systemkurve geht, so genügt dieses bekanntlich einer Differentialgleichung von der Form

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0. \quad (a, \dots, l = 1, \dots, n) \quad (1)$$

Transformiert man die Kurvenparameter t simultan für alle Systemkurven entweder linear (mit konstanten Koeffizienten, die von den Systemparametern abhängen können) oder beliebig, so entsteht nach der bekannten Auffassung der Princeton-Schule eine „affine geometry of paths“ bzw. eine „projective geometry of paths“. In seiner interessanten Arbeit nimmt Verf. ein solches System von K -dimensionalen Mannigfaltigkeiten X_K („spreads“) als gegeben an, daß durch je $K+1$ genügend benachbarte Punkte genau eine X_K geht. Das System hängt dann von $(N-K) \cdot (K+1)$ wesentlichen Parametern ab. Für $K=1$ erhält man durchweg die geometry of paths zurück. Sind $w^\alpha (\alpha, \dots, \omega = 1, \dots, K)$ Parameter auf den X_K und unterzieht man diese simultan den Transformationen $w^\alpha \rightarrow v^\alpha$, wo entweder $v^\alpha = A_\lambda^\alpha w^\lambda + C^\alpha$ ($A_\lambda^\alpha, C^\alpha$ konst.), oder $\text{Det.} \left(\frac{\partial v^\alpha}{\partial w^\lambda} \right) = \text{konst.}$, oder v^α beliebig ist, so entsteht eine „affine“ bzw. „voluminar“ bzw. „descriptive geometry of K -spreads“. Das System genügt einer Differentialgleichung von der Form

$$\frac{\partial^2 x^k}{\partial u^\lambda \partial u^\mu} + \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x^i}{\partial u^\lambda} \frac{\partial x^j}{\partial u^\mu} = 0 \quad (2)$$

(Verf. nimmt entgegen der Gewohnheit $-\Gamma_{ij}^k$ anstatt Γ_{ij}^k), wo aber die Γ_{ij}^k von den u^α abhängen können. Dabei gilt identisch

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{K(K+1)} \cdot \frac{\partial^2 \Gamma_{\lambda\mu}^k}{\partial p_\lambda^i \partial p_\mu^j}; \quad p_\lambda^k = \frac{\partial x^k}{\partial u^\lambda}. \quad (3)$$

Die zugehörige Krümmungsgröße ist

$$B_{ij}^k = -2 \partial_u \Gamma_{ij}^k - 2 \Gamma_{h[u}^k \Gamma_{ij]h}^h + 2 p_\lambda^a \Gamma_{a[u}^k \Gamma_{ij]a}^h, \quad (4)$$

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \Gamma_{ij}^k \cdot a_\lambda \equiv \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial p_\lambda^a}.$$

Die drei obengenannten Geometrien werden bestimmt durch die Γ_{ij}^k bzw.

$$V_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \frac{1}{N-K} p_\lambda^a \Gamma_{ij}^k \cdot a_\lambda \quad (5)$$

bzw.

$$\Pi_{ij}^k = V_{ij}^k - \frac{2}{N+1} V_{aj}^a \delta_i^k - \frac{1}{N+1} V_{ia}^a \delta_j^k, \quad (6)$$

welche je eine Übertragung bestimmen. Es werden die Bedingungen dafür aufgestellt, daß diese Übertragungen in sich eben sind, d. h. daß die Γ_{ij}^k durch Koordinatentransformation und erlaubte Parametertransformation zum Verschwinden gebracht werden können. Zum Schluß behandelt Verf. die Normalkoordinaten und die Erweiterung („extensions“) von Größen der affine geometry of spreads. *D. van Dantzig* (Delft).

Nalli, Pia: Spazi di Riemann di seconda classe. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. e mat., II. s. 1, 139–154 (1932).

Die Krümmungsgrößen $\overset{\circ}{R}_{\omega\mu\lambda}^\nu$ und $R_{\omega\mu\lambda}^\nu$ von zwei linearen Konnexionen $\overset{\circ}{\Gamma}_{\lambda\mu}^\nu = \{\overset{\circ}{\Gamma}_{\lambda\mu}^\nu\}$ und

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\nu = \overset{\circ}{\Gamma}_{\lambda\mu}^\nu + T_{\lambda\mu}^\nu \quad (T = \text{belieb. Affinor}) \quad (1)$$

sind bekanntlich durch

$$R_{\omega\mu\lambda}^\nu = \overset{\circ}{R}_{\omega\mu\lambda}^\nu - \overset{\circ}{V}_\omega T_{\lambda\mu}^\nu + \overset{\circ}{V}_\mu T_{\lambda\omega}^\nu + T_{\lambda\omega}^\alpha T_{\alpha\mu}^\nu - T_{\lambda\mu}^\alpha T_{\alpha\omega}^\nu \quad (2)$$

gebunden (Schouten, Der Ricci-Kalkül. S. 86. Berlin: Julius Springer 1924), — Ist nun $v^\nu(x)$ ein gegebenes Einheitsvektorfeld in der metrischen (Riemannschen) Konnexion und setzt man

$$T_{\lambda\mu}^\nu = v^\nu \overset{\circ}{V}_{\mu} v_\lambda - v_\lambda \overset{\circ}{V}_{\mu} v^\nu, \quad (3)$$

so folgt aus (2): Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz des Γ -Fernparallelismus ist, daß ein Einheitsvektorfeld v^ν existiert, das folgende Gleichung erfüllt:

$$\overset{\circ}{R}_{\omega\mu\lambda}^\nu + \overset{\circ}{R}_{\mu\omega\lambda}^\alpha v_\alpha v^\nu + \overset{\circ}{R}_{\mu\omega\alpha}^\nu v_\lambda v^\alpha + 2 \overset{\circ}{V}_{[\mu} v^\nu \overset{\circ}{V}_{\omega]} v_\lambda = 0. \quad (4)$$

(Die Beweisführung der Verf. ist eine andere.) Ist diese Gleichung erfüllt, so heißt die betreffende Mannigfaltigkeit „eine V_n der zweiten Klasse“. Aus (3) folgt: Beide Parallelübertragungen (welche den Konnexionen Γ und $\overset{\circ}{\Gamma}$ angehören) längs einer Linie L stimmen dann und nur dann überein, wenn das Feld v^ν längs L $\overset{\circ}{\Gamma}$ -parallel ist. (Die Existenz solcher Linien hat der Ref. im „Congruences des courbes dans les espaces . . .“ [Věstn. Kr. č. Společnosti Nauk 1923] bewiesen. Längs jeder allgemeinen L kann man $n-2$ linear unabhängige Vektoren angeben, für welche beide Parallelübertragungen übereinstimmen. Ref.) — Wenn sich das Bogenelement der betreffenden V_n in der Form

$$ds^2 = \sum_i^n a_{ii} (dx^i)^2$$

schreiben läßt (wo für $i > 1$ jede a_{ii} eine Funktion bloß von x^1 und x^i ist), so ist die Gleichung (4) erfüllt, und die betreffende V_n heißt eine „normale V_n der zweiten Klasse“. Die Verf. gibt einige Konstruktionen der Parallelübertragung in solchen V_n . Ob es auch nichtnormale V_n der zweiten Klasse gibt, bleibt unentschieden. [Diese Frage steht im Zusammenhang mit der Gleichung

$$(\overset{\circ}{V}_{[\varepsilon} v^\alpha) (\overset{\circ}{R}_{\mu\omega]\lambda\alpha} v_\nu + \overset{\circ}{R}_{\mu\omega] \alpha \nu} v_\lambda) = 0,$$

welche man laut der Bianchischen Identität aus (4) ableitet. Ref.] Hlavatý (Prag).

Marty, F.: Sur la détermination des surfaces minima périodiques. C. R. Acad. Sci. Paris 193, 1148—1149 (1931).

A surface is periodical if there exists a translation carrying the surface into itself. As minimal surfaces are surfaces of translation, derived from minimal curves, it follows that a minimal surface is periodical if and only if the generating minimal curves are periodical. Using, for the minimal curves, the formulas of Weierstrass, the determination of periodical minimal curves is reduced to an investigation of the periods of the integral of an analytic function. The paper is then concerned with the study of the periodical character of the associated minimal surfaces, and with the geometric meaning of imaginary periods.

Tibor Radó (Columbus).

Čech, Eduard: Sur la théorie de la dimension. C. r. Acad. Sci. Paris 193, 976 bis 977 (1931).

Für separable metrische Räume R kann der Brouwer-Urysohn-Mengersche Dimensionsbegriff bekanntlich folgendermaßen formuliert werden: 1. $\dim R = -1$ dann und nur dann, wenn $R = 0$ ist; 2. $\dim R \leq n$ bedeutet, daß, wenn A eine abgeschlossene, $U \supset A$ eine offene Menge ist, es eine offene Menge V , $A \subset V \subset U$, mit höchstens $n-1$ -dimensionaler Begrenzung gibt. Diese Definition wird für normale topologische Räume untersucht, in denen jede offene Menge ein F_σ (jede abgeschlossene Menge ein G_δ) ist; alle metrisierbaren Räume fallen in diese Raumkategorie. — Es werden folgende Sätze ohne Beweis ausgesprochen: 1. Aus $S \subset R$ folgt $\dim S \leq \dim R$.

2. Der abzählbare Summensatz. 3. Es sei $R = \sum_1^n U_k$, wobei die U_k offene Mengen des R sind. Falls $\dim R = n$ ist, so gibt es endlich viele offene Mengen V_i von der Eigenschaft, daß $R = \sum \bar{V}_i$, je r unter den Mengen \bar{V}_i einen höchstens $n-r-1$ -dimensionalen Durchschnitt haben und jedes \bar{V}_i in (mindestens) einem U_k enthalten ist.

P. Alexandroff (Moskau).

Pontrjagin, L., und G. Tolstowa: Beweis des Mengerschen Einbettungssatzes. *Math. Annalen* **105**, 734—745 (1931).

Ein auf einer Anwendung der Approximationen kompakter Räume durch Komplexe von der gleichen Dimension [im Sinne der Theorie der Projektionsspektren von Alexandroff, *Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen*. *Annals of math.* (2) **30**, (1928) 101—187] beruhender im wesentlichen kombinatorischer Beweis des Satzes, daß jeder n -dimensionale kompakte metrisierbare Raum einer Teilmenge des $n + 1$ -dimensionalen euklidischen Raumes homöomorph ist. *P. Alexandroff.*

Nöbeling, Georg: Bemerkungen zum Mengerschen Einbettungssatz. *Math. Annalen* **105**, 746—747 (1931).

Eine gleichzeitige Ergänzung zu einer früheren Arbeit des Verf. (*Math. Ann.* **104**, 71) sowie zu einer Arbeit von Pontrjagin und Tolstowa (vgl. vorst. Ref.). In beiden Arbeiten werden zwei verschiedene Beweise des Mengerschen Einbettungssatzes erbracht, und zwar mit folgenden Verschärfungen: in der ersten wird gezeigt, daß jeder n -dimensionale kompakte metrisierbare Raum nicht nur einer Teilmenge des R^{2n+1} , sondern sogar einer Teilmenge einer festen n -dimensionalen „Universalmenge“ dieses R^{2n+1} homöomorph ist; in der zweiten wird außer dem Einbettungssatz bewiesen, daß jede stetige Abbildung eines n -dimensionalen kompakten Raumes in den R^{2n+1} durch eine beliebig kleine stetige Abänderung in eine Homöomorphie verwandelt werden kann. — Verf. beweist nun, daß diese beiden Zusätze mit Hilfe der beiden Beweismethoden bewiesen, und zwar zu folgendem Satz vereinigt werden können: F sei ein kompakter metrisierbarer n -dimensionaler Raum, f eine stetige Abbildung desselben in einen R^k , $k \geq 2n + 1$, U_n^k die Menge aller Punkte von R^k mit höchstens n rationalen Koordinaten; dann läßt sich $f(F)$ durch eine beliebig kleine Abänderung in eine zu F homöomorphe Teilmenge von U_n^k überführen. *P. Alexandroff (Moskau).*

Lichtenbaum, Lucien: Sur un invariant topologique. *C. r. Acad. Sci. Paris* **193**, 1307—1308 (1931).

Es sei M ein kompakter metrischer Raum. Verf. nennt Ordnung von M die kleinste Zahl $p \leq \infty$ mit der Eigenschaft, daß sich M für jedes $\varepsilon > 0$ in eine Summe von endlich vielen abgeschlossenen Teilmengen $A_i < \varepsilon$ zerlegen läßt, so daß jedes A_i mit höchstens p Mengen $A_j (j \neq i)$ nichtleere Durchschnitte hat. Verf. behauptet den Satz, daß der Einheitswürfel des R_n die Ordnung $2^{n+1} - 2$ besitzt. *Nöbeling (Wien).*

Cleveland, C. M.: On the existence of acyclic curves satisfying certain conditions with respect to a given continuous curve. *Trans. amer. math. Soc.* **33**, 958—978 (1931).

I. Ist K eine zusammenhängende Menge der Zerlegungspunkte (cut points) einer stetigen ebenen Kurve M , und $R_2 - M = \sum_1^\infty D_i$, so ist K im kleinen zusammenhängend, und zwar: sind $x + y \subset K$ zwei beliebige Punkte aus K , so gibt es eine Zahl N und einen Bogen $\overline{xy} \subset K \cdot \sum_1^N (\overline{D_i} - D_i)$. — II. Ist M eine ebene stetige eindimensionale Kurve, K ihre nulldimensionale abgeschlossene Untermenge derart, daß M durch keine Teilmenge von K zerlegt wird, so gibt es eine Baumkurve $T \supset K$, deren Endpunkte auf K liegen, so daß $M \cdot T$ nulldimensional und $M - T$ zusammenhängend ist. — Der Beweis ist trivial im Falle, daß K auf der Grenze eines zu M komplementären Gebietes D liegt: $T \subset \overline{D}$, und die Menge ihrer Endpunkte fällt mit K zusammen. Im allgemeinen Falle ist die Konstruktion von T etwas umständlich und braucht wiederholte Anwendung zahlreicher Hilfssätze. *Julia Rózańska (Moskau).*

Markoff, A.: Sur une propriété générale des ensembles minimaux de M. Birkhoff. *C. r. Acad. Sci. Paris* **193**, 823—825 (1931).

Der Verf. führt eine Verallgemeinerung des von G. Birkhoff eingeführten Begriffs einer Minimalmenge ein. Es sei ein regulärer topologischer Raum R mit dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom gegeben. Mit $\{y_i\}_{-\infty < i < +\infty}$ wird eine kontinuierliche Gruppe

der topologischen Transformationen von R in sich selbst bezeichnet ($y_t(x)$ ist eine in bezug auf t stetige Funktion bei beliebigem $x \in R$, wobei $y_u y_v x \equiv y_{u+v} x$). — Der Verf. nennt „Minimalmenge“ jede Menge A im Raume R , die irreduktibel in bezug auf die folgende Eigenschaft ist: eine kompakte, nicht leere Menge zu sein, die invariant in bezug auf die Transformationen der Gruppe $\{y_t\}_{-\infty < t < +\infty}$ ist. Dann gilt der Satz: Jede Minimalmenge von endlicher positiver Dimension ist eine Cantorsche Mannigfaltigkeit (im Sinne von P. Urysohn, Fund. Math. 7, 124). *L. Schnirelmann.*

Mechanik der flüssigen und gasförmigen Körper.

Fay, R. D.: Plane sound waves of finite amplitude. (*Massachusetts Inst. of Technol., Cambridge [U. S. A.]*) J. acoust. Soc. Amer. 3, 222—241 (1931).

Lord Rayleigh (the late) hat gefunden, daß bei der Fortpflanzung longitudinaler Schwingungen endlicher Amplitude in Gasen, bei Inbetrachtziehung der Nichtlinearität und Vernachlässigung der Viskosität, die Verdichtungen schneller fortschreiten als die Verdünnungen. Verf. behandelt das Problem, bei Berücksichtigung der Viskosität, von Grund auf neu, mit Hilfe einer Näherungsmethode, welche von Fourierschen Reihen, mit Koeffizienten, die selber aus Reihen von e -Potenzen bestehen, Gebrauch macht. Es zeigt sich, daß die Viskosität die Steilheit der Wellenfront beschränkt. Insbesondere können nicht die Wellenberge immerfort schneller als die Wellentäler vorwärtsschreiten, sondern für jede Wellenlänge und Intensität gibt es einen bestimmten stabilen Wellentypus. Dieser Wellentypus hat die Eigenschaft, daß seine Änderung beim Fortschreiten benachbarten Wellentypen gegenüber ein Minimum ist. Bei unendlich kleiner Amplitude geht dieser stabile Wellentypus in Sinuswellen über. Bei endlicher Amplitude nehmen beim Fortschreiten der Welle die höheren Harmonischen infolge der Nichtlinearität relativ zu, dagegen infolge der Viskosität ab. Letzterer Effekt wird aber meistens vollkommen von ersterem verdeckt. Die Wellenform weicht bereits bei mäßiger Amplitude erheblich von einer Sinuskurve ab. *M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

Moisil, Gr. C.: Sur le principe de d'Alembert pour les liquides incompressibles. Bull. Sect. sci. Acad. Roum. 14, 76—80 (1931).

Man kann bei einer inkompressiblen Flüssigkeit das gegebene Kraftfeld $\varrho \mathfrak{Z}$ (ϱ die Dichte) zerlegen in ein Feld $\varrho \mathfrak{S}$, das ein den kinematischen Kompatibilitätsgleichungen genügendes Beschleunigungsfeld \mathfrak{S} erzeugt, und ein Feld $\varrho \mathfrak{H}$, das sich im Gleichgewicht befindet ($\mathfrak{H} = \text{grad } p(x, y, z)$). Die Zerlegung ist bei gegebenen Randwerten des Druckes eindeutig. Für zwei Dimensionen vgl. Pompéiu, C. r. Acad. Sci. Paris 187, 1121 (1928). Der Satz wird noch etwas verallgemeinert. *Willy Feller* (Kiel).

Fage, A., and V. M. Falkner: On the relation between heat transfer and surface friction for laminar flow. Rep. aeronaut. Res. Comm. Nr 1408, 1—30 (1931).

Unter Bezugnahme auf eine frühere Näherungslösung der Grenzschichtgleichung von Falkner (Rep. 1314, vgl. nachst. Ref.) wird eine verhältnismäßig allgemeine Näherungslösung des laminaren Wärmeüberganges zweidimensionaler Fälle angegeben, bei denen sich die Strömungsgeschwindigkeit v am inneren Rande der Grenzschicht und die Temperaturdifferenz $\Theta_1 - \Theta_0$ der Wärme abgebenden Oberfläche gegenüber dem Luftstrom in Form von Potenzen darstellen lassen: $v = A \cdot s^m$ bzw. $\Theta_1 - \Theta_0 = B \cdot s^p$, mit s als Fortschritt auf der Oberfläche. Die Lösung läßt sich in Gestalt einer Potenzreihe angeben. Die experimentelle Prüfung wird an einem Platinstreifen in freier Strömung und an einem schmalen Nickelstreifen auf der Oberfläche eines Ebonitzylinders im Luftstrom unter verschiedenen Winkeln zur Anblaserichtung vorgenommen. Die Konstanten A, m, B, p werden dabei aus physikalischen Überlegungen gewonnen. Die Übereinstimmung der Versuche mit der theoretischen Lösung ist sehr gut. Im Anschluß daran wird noch festgestellt, daß der Wärmeübergang im laminaren Bereich der Grenzschicht nur unwesentlich durch die Turbulenz im Windstrom beeinflusst wird. (Die Abweichung zwischen dem Verhältnis der Temperaturleitfähigkeit und der kinema-

tischen Zähigkeit bei wirklichen Gasen und dem aus der kinetischen Gastheorie berechneten Wert ist nach Ansicht des Referenten viel geringer als die Autoren angeben, vgl. Wien-Harms, Handbuch der Exp.-Physik 4 I, 359, Leipzig 1931.)

Busemann (Dresden).

Falkner, V. M., and S. W. Skan: Solutions of the boundary-layer equations. *Philosophic. Mag.*, VII. s. 12, 865—896 (1931).

Die Arbeit ist eine gekürzte Wiedergabe einer Veröffentlichung in den „Reports and Memoranda of the Aeronautical Research Committee“ (1930, Nr 1314). Es wird die Lösung der Grenzschichtgleichungen angegeben für den Fall, daß die Geschwindigkeit v der Potentialströmung gegeben ist in der Form $v = k \cdot x^m$ (x = Abstand vom Staupunkt längs der Wand gemessen, y = Wandabstand, k und m = Konstanten, v = kin. Zähigkeit). Hier gibt es ebenso wie im Fall $m = 0$ der Blasiuschen ebenen Platte eine Ähnlichkeitstransformation, so daß man für die Stromfunktion eine gewöhnliche nichtlineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten und mit $\frac{y}{\sqrt{x}} \left(\frac{v}{\nu} \right)^{1/2}$ als unabhängiger Veränderlicher erhält, die durch einen Potenzreihenansatz integriert wird. Die Resultate werden graphisch für verschiedene Werte des Exponenten m angegeben. In dem allgemeinen Fall, daß v irgendeine (bekannte) Funktion von x ist, hängen die Koeffizienten der Differentialgleichung noch von x ab, und die Lösung wird in recht mühsamer Weise hergestellt, indem man x als Parameter auffaßt und für mehrere feste x -Werte die Integration durchführt. Für die Tangentialgeschwindigkeit und die Oberflächenreibung in der Grenzschicht an einer ebenen Platte und einem Kreiszylinder wird ein Vergleich zwischen Theorie und Experiment durchgeführt, der befriedigende Übereinstimmung zeigt.

H. Schlichting (Göttingen).

Roy, Maurice: Réaction en régime permanent d'un fluide incompressible parfait sur un solide immergé. *J. de Math.*, IX. s 10, 439—456 (1931).

In unbegrenzter Flüssigkeit bewegt sich schraubenförmig ein fester Körper, den auch Störungen der Umgebung, z. B. Wirbelschleppen, begleiten dürfen. Unter der Annahme, daß die Strömung in bezug auf den sich bewegenden Festkörper stationär geworden ist, berechnet der Verf. die auf den festen Körper wirkenden Kräfte und Momente, indem er an dessen Stelle einen den gleichen Raum erfüllenden flüssigen Kern einführt, der Träger passender Singularitäten ist.

I. Lotz (Göttingen).

Lotz, I.: Zur Berechnung der Potentialströmung um quergestellte Luftschiffkörper. (*Kaiser Wilhelm-Inst. f. Strömungsforsch.*, Göttingen.) *Ing.-Arch.* 2, 507—527 (1931).

In Analogie zu dem bekannten Rankineschen Verfahren die Strömung um eine Luftschiffkontur in der Längsrichtung durch Überlagerung der Strömung einer Quellsenkenverteilung auf der Achse über die Hauptströmung zu erzeugen, ist von v. Kármán ein Verfahren gegeben worden, das die Querströmung durch Dipolbelegungen auf der Achse herzustellen gestattet. Die zu einer vorgegebenen Kontur gehörige Verteilung ist durch eine Integralgleichung bestimmt. — Verf. berichtet über praktische Erfahrungen bei der zahlenmäßigen Durchführung des v. Kármánschen Nahrungsansatzes (streckenweise konstante Dipolverteilung) und schlägt als Verbesserung eine Approximation durch stückweise linear veränderliche Verteilung vor: die Mehrarbeit, die die Ableitung der Gleichungen und die einmalige Berechnung zweier neuer Tabellen macht, wird mehr als kompensiert durch die geringe Anzahl der notwendigen Unterteilungen, d. h. durch die geringere Ordnung des Gleichungssystems für die Konstanten. Für beide Verfahren enthält die Arbeit Beispiele. — Praktische und theoretische Schwierigkeiten (eine bel. Kontur läßt sich nicht unter allen Umständen durch Dipole auf der Achse darstellen) führen Verf. zu dem Versuch, an Stelle der Dipole eine Quellsenken-Oberflächen-Belegung einzuführen. In der Tat gelang es (die Zwischenrechnungen — und die Auswertung später — sind allerdings trotz der Konzentration der Darstellung langwierig), die zweidimensionale Integralgleichung auf eine eindimensionale zurückzuführen, deren Kern sich wesentlich aus elliptischen Normalintegralen zusam-

mensetzt. Die Integralgleichung löst Verf. mittels des (gut konvergierenden) Iterationsverfahrens. Für die numerische Ermittlung der Kernfunktion werden die Teilfunktionen durch Diagramme dargestellt; die Unendlichkeitsstelle des Kerns diskutiert. — Zum Schluß ein Hinweis auf die Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes. *Marguerre.*

Crocco, G. A.: *Sui corpi aerotermodinamici portanti.* Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. 14, 161—166 (1931).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 2, 422) wurde der sog. Körper mit negativem Widerstand oder der thermo-aerodynamische Körper in seiner Eigenschaft als Vortriebsmittel besprochen. Es ergab sich, daß der Wirkungsgrad erst bei Geschwindigkeiten weit jenseits der Schallgrenze technisch annehmbare Werte erreicht. Soll ein derartiges Vortriebsmittel bei Flugzeugen Verwendung finden, so entsteht die Frage nach dem Verhalten eines auftrieberzeugenden Körpers, wie es das Flugzeug ist, bei Überschallgeschwindigkeiten; besonders hinsichtlich des Widerstandes und somit des Leistungsbedarfes. Der Widerstand kann in Profilwiderstand bei Auftrieb 0 und in einen vom Auftriebsmechanismus hervorgerufenen Widerstand zerlegt werden. Der zweite („Auftriebswiderstand“) ist bei gewöhnlichen Fluggeschwindigkeiten als induzierter Widerstand bekannt. Seine Größe erreicht nach den Arbeiten von Ackeret und Busemann bei dreifacher Schallgeschwindigkeit das Zehnfache seines Wertes bei Unterschallgeschwindigkeit. Auch der Verlauf des Profilwiderstandes ist bei Überschallgeschwindigkeit ein anderer wie bei Unterschallgeschwindigkeit; wobei sich sehr viel größere Werte als nach dem bei Unterschallgeschwindigkeit geltenden quadratischen Gesetz ergeben. Diese Werte folgen aus der ballistischen Funktion von Sjaeci. Sollen die notwendigen hohen Geschwindigkeiten in Erdnähe erreicht werden, so ergeben sich Widerstände, deren Größe jede Möglichkeit praktischer Anwendung ausschließt. Hierbei verliert der „Auftriebswiderstand“ immer mehr an Bedeutung, so daß er schließlich vernachlässigt werden darf. Für jede Geschwindigkeit gibt es aber eine ihr entsprechende Optimalhöhe, bei der der Gesamtwiderstand ein Minimum wird. Wird also eine, einem guten Wirkungsgrad des Vortriebssystems entsprechende Geschwindigkeit eingehalten, so muß der Flug in einer dieser Geschwindigkeit entsprechenden Optimalhöhe erfolgen. Es ergeben sich Werte von stratosphärischer Größenordnung. Der Auftriebswiderstand nimmt mit steigender Höhe an Bedeutung zu. Die notwendigen Leistungen betragen hierbei nur sehr geringe Bruchteile der den gleichen Geschwindigkeiten entsprechenden Werte in Erdnähe. Der Gesamtwiderstandsbeiwert steigt aber gegenüber seinem Werte beim Fluge in Erdnähe, was ein Steigen der Temperatur innerhalb des Vortriebskörpers bedeutet; siehe eingangs zitiertes Referat.

S. Del Proposto (Aachen).

Eula, Antonio: *Sul calcolo del momento torcente aerodinamico agente sulle pale delle eliche.* Aerotecnica 11, 1406—1420 (1932).

Si indica un procedimento di calcolo generale del momento torcente aerodinamico delle pale d'elica e se ne fa un'applicazione al caso di una pala orientabile.

Autoreferat.

Vasilescu, Florin: *Sur une méthode de M. Riabouchinsky ayant pour but de résoudre le problème de Dirichlet, en vue du calcul du potentiel des vitesses.* C. r. Acad. Sci. Paris 193, 1162—1164 (1931).

Bei der Behandlung in Wasser aufsteigender Luftblasen erwähnt Riabouchinsky folgende Methode als Lösung eines Teilproblems bei der Berechnung der Strömung um einen Körper beliebiger Gestalt (vgl. dies. Zbl. 2, 74). Man denke sich durch stetige Deformation die gegebene Körperoberfläche auf eine bequemere Form gebracht, wobei entsprechende Punkte durch Trajektorien verbunden sind, die bei der Deformation durchlaufen werden. Die Länge der Trajektorien werde so gemessen, daß der Parameter $t = 1$ die gegebene, $t = 0$ die bequemere Oberfläche darstellt. Die Potentiale für alle Strömungen aus Grenzbedingungen an beliebigen Zwischenoberflächen werden in dem allgemeinen Potential $\varphi(x, y, z, t)$ zusammengefaßt, das für feste Werte t

zwischen 0 und 1 im Raume x, y, z außerhalb der jeweiligen Oberfläche harmonisch ist. Die als Grenzbedingungen gegebenen Potentiale werden dabei direkt auf alle deformierten Oberflächen übernommen. Durch die Konstanz des Potentials auf den Trajektorien bei veränderter t gelingt nach Riabouchinsky die Lösung des allgemeinen Potentials aus einer Entwicklung in eine Taylorreihe in bezug auf t ausgehend von $t = 0$. Die dabei auftretenden Existenz- und Konvergenzfragen werden hier an einer längs der Radien sternförmig erweiterten Kugel mit Hilfe von Kugelfunktionen dargelegt.

Busemann (Dresden).

Rosenblatt, A.: Sur la stabilité des mouvements laminaires des liquides visqueux. II. Amortissement exponentiel à l'infini. Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. 14, 184—191 (1931).

Fortsetzung der Note im gleichen Band, S. 93 (vgl. dies. Zbl. 2, 421). Der Verf. untersucht, unter welchen Voraussetzungen Lösungen seines Gleichungssystems bestehen, die zeitlich und örtlich abklingenden Störungen entsprechen, und gibt unter diesen Voraussetzungen Abschätzungsformeln für die Größenordnung der Entwicklungskoeffizienten. Die Konvergenzuntersuchung bleibt einer weiteren Note vorbehalten.

F. Noether (Breslau).

Rosenblatt, A.: Sur la stabilité des mouvements laminaires des liquides visqueux. III. Convergence de l'algorithme. Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. 14, 279—284 (1931).

Als Abschluß der vorausgehenden Untersuchungen (ebenda, S. 93 u. 184; dies. Zbl. 2, 421 u. vorst. Referat) wird der Konvergenzbeweis für die aufgestellte Entwicklung durchgeführt.

F. Noether (Breslau).

Relton, F. E.: The steady broadside motion of an anchor ring in an infinite viscous liquid. Proc. roy. Soc. Lond. A 134, 47—57 (1931).

Die Arbeit beschäftigt sich damit, die Bewegung in einer zähen Flüssigkeit zu untersuchen, die durch gleichmäßige Translation eines Ringes in der Richtung der Ringachse entsteht. Bei Verwendung von Ringkoordinaten λ, θ, φ und Benützung eines entsprechenden begleitenden Dreieins weist man die Existenz einer Stromfunktion $r^{1/2}\chi$ nach, drückt damit den Geschwindigkeitsvektor aus, leitet den Wirbelvektor ab. Die Randbedingung liefert die Annahme, daß kein Gleiten der Ringfläche stattfindet. Setzt man stationäre Bewegung, das Fehlen äußerer Kräfte und so kleine Geschwindigkeiten voraus, daß man die Trägheitsglieder vernachlässigen kann, so genügt die Funktion χ der Differentialgleichung:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{3}{4} \operatorname{cosech}^2 \lambda \right) \left\{ (\cosh \lambda + \cos \theta)^2 \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} - \frac{3}{4} \chi \operatorname{cosech}^2 \lambda \right) \right\} = 0.$$

Nun zeigt Relton, daß sich folgendes System von Lösungen dieser Differentialgleichung ergibt:

$$a_k (\nu^2 - 1)^{\frac{1}{2}} P_{k-\frac{1}{2}}^1(\nu) \frac{\sin}{\cos} k\theta \\ b_k (\nu^2 - 1)^{\frac{1}{2}} P_{k-\frac{1}{2}}^1(\nu) \sin \theta \frac{\sin}{\cos} k\theta/\nu + \cos \theta, \quad \nu = \cosh \lambda.$$

Darin sind die Funktionen $P_{k-\frac{1}{2}}^1(\nu)$ zugeordnete Kugelfunktionen. Die Stromfunktion läßt sich in der Form annehmen:

$$r^{\frac{1}{2}} \chi = \sum^k \left(a_k \cos k\theta + b_k \frac{\sin \theta \sin k\theta}{\nu + \cos \theta} \right) \frac{\sinh \lambda}{(\nu + \cos \theta)^{\frac{1}{2}}} P_{k-\frac{1}{2}}^1(\nu).$$

Nach Ermittlung der Konstanten dieses Ausdruckes werden die Druckverteilung und der Widerstand untersucht.

F. Knoll (Wien).

Tölke, F.: Der Einfluß der Durchströmung von Betonmauern auf die Stabilität. Ing.-Arch. 2, 291—320 (1931).

Nachdem die Beobachtung von Merkle betreffend Veränderlichkeit der spez. Durchlässigkeit mit dem Druck aus der isothermischen Zusammendrückung der Luftblasen erklärt und formelmäßig erfaßt wurde, geht der Verf. an die dementsprechende Erweiterung der allgemeinen Grundgleichung des Sicker Vorganges. Hierauf folgt

der wichtigste Teil der Arbeit: die Ermittlung der von der durchsickernden Flüssigkeit auf den durchsickerten porösen Körper ausgeübten Kräfte und die Aufstellung der Gleichgewichtsgleichungen dieses elastischen Kontinuums. Unter Heranziehung des bekannten Zusammenhanges zwischen Verzerrungs- und Spannungstensor eines elastischen Körpers erhält er die allgemeine Differentialgleichung des Verschiebungsvektors für das durchströmte Kontinuum. Ausgerüstet mit diesen ganz generellen Grundzusammenhängen versucht nunmehr der Verf. alle technisch wichtigen Probleme der Stauwanddurchsickerung zu erledigen, wobei er allerdings zu einer Fülle von Annäherungen gezwungen ist, deren Berechtigung zum Teil noch einer näheren Prüfung zu bedürfen scheint (auch die dabei zugrunde gelegten Randbedingungen für die Sickerströmung erscheinen im Lichte neuester Forschung zum Teil als problematisch), wenn sie auch gegenüber den bisherigen sehr tastenden Lösungen der vorliegenden schwierigen Problemgruppe große Fortschritte bieten dürften. — Außer den vom Sickerwasser durch Reibung und Auftrieb auf den durchsickerten Körper bewirkten Lastspannungen, die systematisch erledigt werden, wird noch die Frage der durch die nicht homogene Beschaffenheit der Betonmasse (poröse Zementpaste und fast undurchlässige Zuschlagteile) bedingten örtlichen Zusatzspannungen kurz betrachtet.

Paul Neményi (Berlin).

Tölke, F.: Die Prüfung der Wasserdichtigkeit von Beton. Ing.-Arch. 2, 428 bis 448 (1931).

Nach einer Zusammenstellung der wichtigeren üblichen laboratoriumsmäßigen Prüfmethoden für die Wasserdichtigkeit von Beton wird an eine theoretische Untersuchung des Sickervorganges bei zwei, wegen ihrer bequemen Durchführbarkeit besonders wichtigen, achsensymmetrischen Versuchsanordnungen in schematisierter Form geschritten. Es wird behandelt, erstens: der zylindrische Probekörper mit einem schmalen (unendlich schmalen) Dichtungsring (am Rande der Wasserzufuhr) und außerhalb dieses Ringes überall freier Oberfläche, und zweitens der Fall eines ebenfalls zylindrischen Probekörpers, dessen eine Stirnfläche außerhalb der Wasserzufuhrfläche vollständig abgedichtet ist, dessen Mantel sowie die andere Stirnfläche aber vollständig frei sind. Für beide Fälle gelingt die Lösung mit Hilfe einer Reihenentwicklung, deren Glieder aus trigonometrischen und Zylinderfunktionen aufgebaut sind. Die Lösung wird vollständig ausgewertet, so daß nunmehr aus den bequem durchführbaren Durchsickerungsversuchen obiger Anordnung zuverlässige Schlüsse auf die Darcysche Zahl k möglich sind.

Paul Neményi (Berlin).

Relativitätstheorie.

Lanezos, Cornel: Elektromagnetismus als natürliche Eigenschaft der Riemannschen Geometrie. (Math. Dep., Purdue Univ., Lafayette, Ind.) Z. Physik 73, 147—168 (1931).

This paper develops a new idea for unifying the electromagnetic theory with the relativity-theory of gravitation, while retaining a purely Riemannian geometry. The author adopts the point of view of Hilbert (Gött. Nach. 1915, 315), that all physical happenings are determined by a scalar "world-function" H , being such as to annul the variation of the integral

$$\iiint H \sqrt{(-g)} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$$

where (x^0, x^1, x^2, x^3) are generalised coordinates in space-time and g is the determinant of the coefficients g_{pq} . Hilbert took the function H to be $(yK + S)$, where y is a constant which is inversely proportional to the Newtonian constant of gravitation, K is the Riemann scalar curvature, and S consists of terms due to the electromagnetic field and to material particles. The author, on the other hand, takes the world-function H to be a quadratic function of the contracted curvature-tensor K_{pq} , of the form

$$H = H_1 + CH_2$$

where H_1 is the invariant $K_{\alpha\beta}K^{\alpha\beta}$, and H_2 is the invariant K^2 , while C is a numerical constant. This amounts to rejecting Einstein's gravitational equations in empty space, $K_{pq} = 0$, and replacing them by differential equations which are of the second order for the K_{pq} , or of the fourth order for the g_{pq} . The duality of the two invariants H_1 and H_2 corresponds to the duality of the two fundamental phenomena, electricity and gravitation.

The action-integral is gauge-invariant, i. e. it is independent of the choice of the unit of length. — In the course of the analysis, a vector Φ^α is found to occur naturally, which satisfies the equation of continuity $\partial \Phi^\alpha / \partial x^\alpha = 0$ (where the symbol ∂ denotes covariant differentiation). This vector is identified with the electromagnetic vector-potential, so its equation of continuity becomes the equation of conservation of electric charge. It also satisfies the potential-equation, to the first approximation; and in the last chapter of the paper, the author derives Lorentz's law of ponderomotive force.

Whittaker (Edinburgh).

Swann, W. F. G.: Classical electrodynamics and the conservation of energy. J. Franklin Inst. **212**, 563—576 (1931).

Bekanntlich kann man die elektromagnetische Masse des Lorentz'schen Elektrons nicht auf seine elektromagnetische Energie allein zurückführen, sondern muß zu ihrer Erklärung auch auf „Kohäsionskräfte“ greifen. Vektoralgebraisch geht dies, wie der Verf. bereits [Bull. of Nat. Res. Council **24**, 41—44 (1922)] gezeigt hat darauf zurück, daß aus der Lorentz'schen Bewegungsgleichung $\iiint (\mathcal{E} + [u\mathcal{H}]/c) \varrho dt = 0$ die Energiegleichung

$$v \iiint (\mathcal{E}_0 + [u\mathcal{H}_0]/c) \varrho dt = \iiint (\Delta v \cdot \mathcal{E}_i + [u\mathcal{H}_i]/c) \varrho dt + \frac{\partial}{\partial t} \iiint \frac{1}{2} (\mathcal{E}_i^2 + \mathcal{H}_i^2) d\tau + c \iiint [\mathcal{E}_i \mathcal{H}_i]_n dS$$

folgt. Darin ist v die Geschwindigkeit des Schwerpunktes des Elektrons, $u = v + \Delta v$, $\mathcal{E}_0, \mathcal{H}_0$ das Außen-, $\mathcal{E}_i, \mathcal{H}_i$ das Eigenfeld des Elektrons. Der erste Term der rechten Seite stört die Energiebilanz und stellt, wie man sofort abliest, die Arbeit der Kohäsionskräfte dar. Um eine rein elektromagnetische Energiebilanz zu erhalten, setzt nun der Verf. die rechte Seite der Lorentz'schen Bewegungsgleichung $\alpha/c^2 \dot{v}$, wo α eine von dem Aufbau des Elektrons abhängige Konstante ist, die für das Lorentzelektron $c^2/24\pi a$ wird. (Er geht zwar von einer gegenüber der Lorentztransformation invarianten, auf einer von Leigh Page gegebenen relativistischen Form der Lorentz'schen Bewegungsgleichung beruhenden Formel aus, vernachlässigt aber sofort die Glieder zweiter Ordnung.) Durch diesen Ansatz der rechten Seite wird das störende Glied der Energiebilanz aufgehoben. Dafür besagt die Gleichung aber nun, daß das Elektron eine nicht elektromagnetische Ruhmasse α/c^2 hat.

Zerner (Wien).

Novobatzky, Karl: Erweiterung der Feldgleichungen. Z. Physik **72**, 683—696 (1931).

Es wird eine affine Geometrie mit den Übertragungsgrößen

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\nu = \left\{ \begin{matrix} \lambda\mu \\ \nu \end{matrix} \right\} + S_{\lambda\mu}^\nu \quad (4)$$

zugrunde gelegt, wo $S_{\lambda\mu}^\nu$ ein in allen Indizes antisymmetrischer Tensor sei. Die Feldgleichungen werden aus einem Hamiltonschen Prinzip abgeleitet, dessen Hamiltonsche Funktion aus der Krümmungsinvarianten R der Mannigfaltigkeit

$$R = K + S_{\alpha\beta\gamma} S^{\alpha\beta\gamma} \quad (15)$$

(K = Riemannsche Krümmung) und dem elektromagnetischen Anteil aufgebaut wird. Der letztere Anteil wird in der üblichen Form

$$L = \frac{1}{4} F_{\lambda\mu} F^{\lambda\mu} \quad (13)$$

angesetzt mit

$$F_{\lambda\mu} = V_\lambda \varphi_\mu - V_\mu \varphi_\lambda. \quad (7')$$

Während aber im Riemannschen Raum das eine System der Maxwell'schen Gleichungen durch diesen Ansatz der Feldstärke schon automatisch erfüllt ist, ist das hier nicht der Fall. Man erhält hier vielmehr durch diese Gleichungen die folgende Verknüpfung zwischen den geometrischen Größen $S_{\lambda\mu}^\nu$ und den Potentialen φ_μ :

$$\frac{1}{2} P_{\lambda\mu\nu} \equiv \frac{\partial S_{\mu\nu}^\alpha \varphi_\alpha}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial S_{\nu\lambda}^\alpha \varphi_\alpha}{\partial x^\mu} + \frac{\partial S_{\lambda\mu}^\alpha \varphi_\alpha}{\partial x^\nu} + S_{\mu\nu}^\alpha F_{\alpha\lambda} + S_{\nu\lambda}^\alpha F_{\alpha\mu} + S_{\lambda\mu}^\alpha F_{\alpha\nu} = 0. \quad (12)$$

Es sind dies 4 Gleichungen, die bei der Variation als Nebenbedingungen zu gelten haben. Die Feldgleichungen der Gravitation und des Elektromagnetismus werden durch Variation nach allen Feldgrößen gewonnen. Die Untersuchung spezieller Lösungstypen ergibt keine durchgängig reguläre statische Lösung, wohl aber eine axial-symmetrische stationäre Lösung, korrespondierend einem Korpuskel mit kugelsymmetrischem elektrischen Feld und einem magnetischen Moment. *Lanczos* (Lafayette).

Racine, Ch.: Sur les équations de la gravitation d'Einstein. C. r. Acad. Sci. Paris 193, 1167—1169 (1931).

Bereits in einer vorhergehenden Note hatte Verf. für die metrische Fundamentalform

$$ds^2 = V^2 dt^2 - \sum_{i,j=1}^3 g_{ij} dx^i dx^j$$

des Einsteinschen (statischen) Schwerfeldes durch eine Reihe zusätzlicher Annahmen über die Natur des raumzeitlichen Kontinuums eine euklidische Lösung der Gravitationsgleichungen ausgesondert. Dasselbe Theorem wird nunmehr aus sechs Voraussetzungen abgeleitet, welche die oben angeführte Metrik betreffen (Stetigkeit und stetige Differenzierbarkeit der Koeffizienten V und g_{ij} bis einschließlich dritter Ordnung, Existenz beiderseitiger positiver Schranken für V , Unbegrenztheit und einfacher Zusammenhang des raumzeitlichen Kontinuums, Doppelpunktfreiheit der Hyperflächen $t = \text{const}$, deren Punkte einer näher beschriebenen Art von „Intervallschachtelung“ unterworfen werden können). Unter diesen Einschränkungen existieren nur noch Lösungen der Gravitationsgleichungen, welche einem euklidischen ds^2 entsprechen, wie Verf. in einer Beweisskizze zeigt. *M. Pinl* (Berlin).

Haenzel, Gerhard: Über Lösungen der Gravitationsgleichungen Einsteins. Z. Physik 72, 798—802 (1931).

Die Welt de Sitters hat bekanntlich die Struktur eines vierdimensionalen projektiven Raumes, der eine Cayley-Metrik mit der Fundamentalfläche $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_5^2 = 0$ aufweist. Bei jeder Bewegung (d. h. jeder Kollineation, die diese Metrik erhält) gibt es mindestens einen reellen R_3 , der in sich übergeht. Hat dieser R_3 die Gleichung $x_1 = 0$ (es gibt immer einen $\text{Fix-}R_3$, den man bei passender reeller Koordinatenwahl durch diese Gleichung bestimmen kann), so muß in ihm natürlich die Fläche $x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_5^2 = 0$ in sich übergehen. Derartige nichteuklidische Bewegungen im R_3 lassen sich aber nach St. Jolles dadurch kennzeichnen, daß eine hyperbolische Geradenkongruenz und auf ihr eine involutorische Abbildung der Kongruenzgeraden erhalten bleibt. Verf. wendet diese liniengeometrische Methode zur Interpretation der Welt de Sitters an. Auch auf Einsteins Zylinderwelt werden diese Betrachtungen übertragen.

Cohn-Vossen (Köln).

Hagihara, Yusuke: Theory of the relativistic trajectories in a gravitational field of Schwarzschild. (Astron. Observ., Azabu, Tokyo.) Jap. J. Astron. a. Geophys. 8, 67 bis 176 (1931).

The paper contains an exhaustive investigation of the possible modes of motion of a massless particle or light-pulse in the gravitational field of an isolated particle, the metric of which is specified by

$$ds^2 = c_0^2 (1 - \alpha/r) dt^2 - (1 - \alpha/r)^{-1} dr^2 - r^2 d\varphi^2 - r^2 \sin^2 \varphi d\theta^2,$$

where c_0 is a constant and $\frac{1}{2}\alpha$ the mass of the particle causing gravitation. t is identified with coordinate-time, and r, φ, θ with spatial polar coordinates. — The first three chapters are introductory in the sense that they establish a general method of deducing the equations of the trajectories by means of a variational principle. In the case of the Schwarzschild field these equations are reduced to

$$\begin{aligned} h_1 \alpha^{-2} ds &= du / (u^2 U^{\frac{1}{2}}), \quad 0 = d\varphi - du / U^{\frac{1}{2}}, \\ 0 &= h_1 c_0 \alpha^{-2} h_3^{-1} dt - (1 - u)^{-1} u^{-2} U^{-\frac{1}{2}} du, \\ U &= u^3 - u^2 + \alpha^2 h_1^{-2} u + \alpha^2 (h_3^2 - 1) h_1^{-2}, \end{aligned}$$

where

$u = \alpha/r$, ψ is the polar angle in the plane of motion (for it is shown that the orbits are all plane curves), and h_1, h_2, h_3 are constants of integration. — Chapters IV and V contain the solutions of these equations in terms of Weierstrassian elliptic functions, and a tabulation of the different cases obtained by varying the arbitrary constants. Two main divisions are made, the one corresponding to non-degenerate and the other to degenerate forms of the elliptic functions. — In Chapters VI and VII the various types of motion are considered in great detail, the work being liberally illustrated by diagrams. It is found in the non-degenerate cases that the general shape of the orbit is either elliptic, hyperbolic or parabolic, with an advance of the perihelion. Orbits of this type are divided into two classes ("pseudo-conics" or "quasi-conics") according as they do or do not pass inside the sphere $r = \alpha$. Values of r less than α are excluded from consideration because they do not belong to the world of real events. In the case of "pseudo-conics" the approach of the particle to the sphere is asymptotic with respect to the time t . In the degenerate cases the orbits are spiral, circular or "pseudo-circular". — Chapter VIII is devoted to a correlation of the various types of orbit. In Chapter IX it is shown that the trajectory of a light-pulse is "quasi-hyperbolic", "pseudo-hyperbolic", or "quasi-hyperbolic spiral", and that the belief that a very massive star can absorb the light emitted from its surface is fallacious. The remaining chapters contain a full discussion of the nature of "quasi-elliptic" motion, with special reference to the actual motion of the planets of the Solar System. A generalisation is obtained of Einstein's formula for the motion of the perihelion and of Kepler's third law. The paper concludes with a summary of the principal results. H. S. Ruse.

Djačenko, Vadim.: Le problème planétaire dans la théorie spéciale de relativité. II. Zap. fiz.-mat. Vidd. Vseukrain. Akad. Nauk, Kyiv 5, 1–5 (1931) [Ukrainisch].

In an earlier paper [same magazine 4, 3 (1929)] the author obtained general equations of the relativistic orbits in φ , σ and ζ functions. In the paper under review he discusses these orbits 1) for real argument and $\Delta \neq 0$ and 2) for $\Delta = 0$ (Δ being discriminant, determining general properties of the orbit). B. P. Gerasimovič.

Tolman, Richard C.: On the theoretical requirements for a periodic behaviour of the universe. (California Inst. of Technol., Pasadena.) Physic. Rev., II. s. 38, 1758–1771 (1931).

Nach kurzem historischen Überblick und genauerer Umschreibung des Zieles der Arbeit wird die bekannte allgemein-relativistische Mechanik eines nichtstatischen Universums kurz auseinandergesetzt. Die analytischen und thermodynamischen Bedingungen für rein periodische Änderungen des Modells werden aufgestellt, und es wird gezeigt, daß beide für plausible Annahmen über die das Modell erfüllende Materie unverträglich sind. Man kann die strenge Periodizität nur mit erkünstelten Materiearten erzwingen. Dagegen gibt es „quasiperiodische“ Modelle, bei welchen der räumliche Krümmungsradius der Welt von der unteren Grenze 0 (unendliche Energiedichte!) anwächst auf einen maximalen Wert und dann wieder abnimmt bis zum Werte 0 usw. An der unteren Grenze wird die erste Ableitung des Krümmungsradius nach der Zeit $+\infty$ oder $-\infty$, die zweite Ableitung $-\infty$, so daß man dort kein Minimum im analytischen Sinne hat. Doch hält der Verf. die Aneinanderreihung solcher Lösungen der Differentialgleichungen für sinnvoll. Dann werden drei Spezialfälle etwas näher untersucht: 1. inkohärente, ruhende Materie, 2. reine Strahlung, 3. Strahlung mit einatomigem idealem Gase im Gleichgewicht. Die kosmologische Konstante λ , deren Entbehrlichkeit bei dem angenommenen nichtstatischen Linienelement schon von Friedmann [Z. Physik 10, 377 (1922)] erkannt worden war, wird konsequent gleich Null gesetzt. Allgemeine zum Teil einschränkende Betrachtungen schließen die Arbeit ab.

Heckmann (Göttingen).

Kogbetliantz, Ervand: Sur la vitesse de propagation de la gravitation. Ann. de Phys., X. s. 16, 71–99 (1931).

Kogbetliantz hat bereits 1928 (C. R. 186, 944–946) den Vorschlag gemacht, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation durch einen Laboratoriumsversuch

zu messen. Eine besonders dafür geeignete Form der rotierenden Gravitationsmasse und der als Meßinstrument dienenden Drehwaage schlug er 1930 (C. R. **191**, 30—31) vor. In der vorliegenden Arbeit wird der Inhalt dieser beiden Aufsätze in wesentlich erweiterter Form wiedergegeben und auf die zugrunde liegende Vorstellung über die Art der Fortpflanzung der Gravitationswirkung (Ansatz von Lehmann-Filhés und Hepperger) näher eingegangen. Die astronomischen Folgerungen werden diskutiert und alle für die Durchführung des vorgeschlagenen Versuches erforderlichen Rechnungen ausführlich dargelegt.

Auf den der ganzen Arbeit zugrunde liegenden Gedanken über die Art der Gravitationsfortpflanzung und auf die vorgeschlagene Versuchsanordnung selber kann im Rahmen dieses Referates nicht näher kritisch eingegangen werden. Es sei jedoch Kogbetliantz' vorgeschlagener Versuch verglichen mit einem ähnlichen, bereits 1894/96 von B. und J. Friedlaender ausgeführten Massen-Rotationsexperiment. Beide Versuche unterscheiden sich im theoretischen Ausgangspunkt, in der experimentellen Anordnung und auch der Größenordnung nach wesentlich voneinander. Die Gebrüder F. suchten ein relatives Zentrifugalfeld für den nichtmitrotierenden Beobachter (die Drehwaagenmassen) nachzuweisen, während das nach K. auftretende Rotations-Zusatzfeld nur von der Verspätung der Gravitation bei ihrem Laufe von den einzelnen rotierenden Massenelementen zum Beobachter herrühren soll. Demgemäß war bei F.s die Ebene der rotierenden Massenscheibe parallel zum Drehwaagen-Torsionsfaden, während beim K.schen Versuche die rotierende Scheibe senkrecht zum Torsionsfaden stehen muß. Das von den Gebrüdern F. gesuchte Rotationsfeld ist vom Scheibenmittelpunkte radial nach außen gerichtet und bei Berechnung im Sinne der allgemeinen Relativitätstheorie von höherer Größenordnung in bezug auf v/c ; das K.sche Rotations-Zusatzfeld dagegen würde senkrecht zum Scheibenradius stehen und v/c in erster Potenz proportional sein.

Schlomka (Greifswald).

Marcus, Alexander: Classical and modern gravitational theories. Philosophic. Mag., VII. s. 12, 959—962 (1931).

Kritische Bemerkung zur unter demselben Titel erschienenen Arbeit von A. Press, Philosophic. Mag., VII, 11, 118 (1931), vgl. dies. Zbl. **1**, 34. Es werden einige dort und in einer vorangehenden Note, Philosophic. Mag. VII, 8, 642—643 (1929) aufgestellte Behauptungen berichtigt.

G. Beck (Leipzig).

Varičak, Vladimir: Über die Beschleunigung. Rad jugoslav. Akad. Znan. i Umjetn., Razr. mat.-prirodosl. **241**, 65—68 (1931) [Serbo-kroatisch].

Interpretiert man die spezielle Relativitätstheorie in der Bolyai-Lobatschefsky-schen Geometrie, so ist es zweckmäßig, die Geschwindigkeit v durch $U = \mathfrak{Ar}\mathfrak{L}g \frac{v}{c}$ zu ersetzen. Definiert man die Beschleunigung als Änderungsgeschwindigkeit von U , die Kraft als Änderungsgeschwindigkeit des Impulses, so erhält man die „klassische“ Beziehung: Kraft gleich Masse mal Beschleunigung.

Willy Feller (Kiel).

Murnaghan, Francis D.: On the representation of a Lorentz transformation by means of two-rowed matrices. Amer. math. Monthly **38**, 504—511 (1931).

Straneo, Paolo: Teoria unitaria della gravitazione e dell'elettricità. Rend. Semin. mat. Roma, II. s. 7, 80—86 (1931).

Noll, W.: Gibt es in der Natur bevorzugte Bewegungszustände? (Physikalisches Relativitätsproblem.) Astron. Nachr. **244**, 337—350 (1931).

Frenkel, J.: What does Einstein mean? Science (N. Y.) **1931 II**, 609—618 (1931).

Quantentheorie.

Eddington, Arthur: On the mass of the proton. Proc. roy. Soc. Lond. A **134**, 524 bis 532 (1931).

L'A. sviluppa e completa la teoria della relazione che esiste fra il protone e l'elettrone già sinteticamente esposta in una «Preliminary Note on the Masses of the Electron, the Proton, and the Universe» (s. dies. Zbl. **1**, 43). Dapprima, a mezzo dell'equazione del Dirac per un elettrone semplice, deduce l'equazione:

$$(136 i E_s \partial / \partial \theta_s + 1) \psi = 0$$

per un elettrone col vettore momento nella direzione s , dove $d\theta_s$ è la misura naturale di uno spostamento secondo la teoria del campo affine, $d\theta_s^2$ risultando l'invariante affine $NR_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$, mentre il fattore N rappresenta il numero di elettroni (o protoni) del sistema. — Esponendo le ragioni che conducono a ritenere come incompleta questa equazione, l'Eddington stabilisce l'equazione corretta:

$$[10(iE_s \partial/\partial E_s)^2 + 136(iE_s \partial/\partial \theta_s) + 1]\psi = 0$$

nella quale i fattori 10 e 136 rappresentano il numero dei gradi di libertà associati coi rispettivi termini energetici. La massa m di una particella soddisfacente a quest'ultima equazione è data in misura naturale da:

$$10 m^2 - 136 m + 1 = 0,$$

oppure, in fattori, $(135,9264 m - 1)(0,0735692 m - 1) = 0$.

Le due radici corrispondono evidentemente agli elettroni ed ai protoni, ed il loro rapporto è 1847, 60.

Bossolasco (Turin).

Bryden jr., Samuel D.: The structure of the nucleus and its total moment of momentum. (*Massachusetts Inst. of Technol., Cambridge [U. S. A.]*) *Physic. Rev.*, II. s. 38, 1989—1994 (1931).

Der Verf. stellt das bis jetzt bekannte Material über den Gesamtdrehimpuls I der Atomkerne zusammen. Er glaubt hieraus schließen zu müssen, daß die Regel, nach der I ganzzahlig oder halbzahlig ist, je nachdem der Kern eine gerade oder ungerade Anzahl Protonen enthält, erfüllt sei. Einige Ausnahmen (K, Ag) möchte er der Tatsache zuschreiben, daß die Hyperfeinstruktur dieser Elemente besonders klein ist und deshalb nicht gemessen werden konnte. Ähnlich wie die Konfiguration der Außenelektronen im Atom durch ihre Quantenzahlen klassifiziert wird, versucht er die Kerne durch Quantenzahlen der einzelnen Protonen zu beschreiben, wobei dann Begriffe wie s -, p -, d -Bahnen, abgeschlossene Schalen usw. auf den Kern übertragen werden. Inwiefern solche Begriffe, deren Anwendbarkeit ja bei den Außenelektronen wesentlich auf dem zentralen Charakter des Kernfeldes beruht, auch für die Protonen im Kerne noch eine Bedeutung haben sollen, wird jedoch nicht näher begründet. *R. de L. Kronig.*

Lennard-Jones, J. E.: The quantum mechanics of atoms and molecules. *J. Lond. math. Soc.* 6, 290—318 (1931).

Zusammenfassender Vortrag, in welchem die Methoden von Hartree und Slater in Umrissen gezeichnet und durch Diskussion der Grundzustände des C-Atoms einerseits, eines 2-atomigen Moleküls aus kugelsymmetrischen Atomen andererseits illustriert werden.

Fues (Hannover).

Bhagavantam, S.: Raman effect in gases. II.: Some theoretical considerations. *Indian J. Phys.* 6, a. Proc. Indian Assoc. Sci. 15, 331—344 (1931).

Es wird die Streuung von monochromatischem Licht an optisch anisotropen axial-symmetrischen Molekülen klassisch berechnet. Die Hauptwerte der Polarisierbarkeit des Moleküls seien A, A, C . Dann ist die mittlere Polarisierbarkeit $\mu = (2A + C)/3$, die optische Anisotropie $\gamma = C - A$. Bei zweiatomigen Molekülen wird die Rotation berücksichtigt, indem μ und γ in einem raumfesten Koordinatensystem in ihrer Abhängigkeit von der Rotationsfrequenz ν angegeben werden. Die einfallende Lichtwelle der Frequenz n induziert ein elektrisches Moment, das aus Gliedern mit der Zeitabhängigkeit $\sin 2\pi nt$ bzw. $\sin 2\pi(n \pm 2\nu)t$ besteht. Neben der unverschobenen Linie (Rayleigh-Streuung) gibt dies auch zu Linien der Frequenz $n \pm 2\nu$ Anlaß (Rotations-Raman-Streuung). Man berechnet die Intensitäten in den raumfesten Richtungen, mittelt über die Anfangslagen der Rotation und erhält so die Intensität und Polarisation der Streuung in ihrer Frequenzabhängigkeit. Bei linearpolarisiertem Einfallslight ($J_x = J_y = 0$) zeigen die Rotationslinien eine Depolarisation $J_x/J_z = \frac{3}{4}$. In der spektral nicht zerlegten Streuung ist die Depolarisation etwa 4mal so groß wie in der unverschobenen Linie allein. — Es werden nun μ und γ als Funktionen der Kern-

verrückungen betrachtet. Ist die Schwingungsfrequenz ν , so erhält man neben der unverschobenen Linie zwei Linien $n \pm \nu$ (Schwingungs-Ramaneffekt). Die Rotation bleibt unberücksichtigt. Schließlich wird erwähnt, daß man aus der Intensität der Rotationszweige Rückschlüsse auf μ und γ ziehen kann. Dabei ist zu beachten, daß man bei einem symmetrischen Kreisel bloß $\frac{2}{3}$ der Intensität erwarten kann wie bei einem zweiatomigen Molekül. Umgekehrt wird versucht, aus theoretischen Angaben über μ und γ die Intensität der Rotationszweige zu berechnen, wobei größenordnungsmäßige Übereinstimmung mit dem Experiment erzielt wird. *L. Tisza* (Budapest).

Neugebauer, Th.: Theorie des Kerreffektes in der Wellenmechanik. (*Inst. f. Theor. Phys., Univ. Budapest.*) *Z. Physik* **73**, 386—411 (1931).

Der Kerreffekt an Gasen und Dämpfen wird quantenmechanisch untersucht, indem die Lichtwelle als kleine Störung des im elektrischen Felde befindlichen Moleküles angesetzt wird. Die früher von Kronig für den quadratischen Kerreffekt abgeleitete allgemeine Formel wird mit dem aus der Langevin-Born-Gansschen Orientierungstheorie abgeleiteten Ausdruck verglichen um festzustellen, inwiefern die quantenmechanische Formel mit der klassischen korrespondiert. Die letztere besteht aus zwei Teilen, dem Dipolglied und dem Anisotropieglied, deren Identität mit zwei Gliedern in der quantenmechanischen Formel nachgewiesen werden konnte. Außerdem enthält aber die quantenmechanische Formel noch einige weitere Glieder. Was die Größenordnung der einzelnen Bestandteile betrifft, überwiegt bei Dipolmolekülen das Dipolglied die übrigen Glieder bei weitem, so daß diese dort experimentell kaum festzustellen sind. Bei Molekülen ohne Dipolmoment dagegen ist nur das Anisotropieglied wesentlich. Die Benutzung der klassischen Formel ist somit in allen Fällen mit erheblicher Näherung berechtigt.

R. de L. Kronig (Groningen).

Langmuir, Irving: Diffusion of electrons back to an emitting electrode in a gas. *Physic. Rev.*, II. s. **38**, 1656—1663 (1931).

Es handelt sich um die unselbständige Entladung in Edelgasen von etwa 1 mm Druck, und zwar um den eindimensionalen Fall. Ausgehend von einer Formel von Hertz [*Z. f. Ph.* **32**, 278 (1925)] berechnet Verf. für die Abhängigkeit des die Anode erreichenden Stroms i vom Potentialfall V die Formel

$$i = 16\pi/3 \cdot J \lambda C V/V_0 \lg(V + V_0/V_0),$$

wo J der Emissionsstrom der Kathode (Sättigungsstrom), λ freie Weglänge, C elektrostatische Kapazität der Elektroden ist und V_0 der konstant angenommenen Austrittsgeschwindigkeit der Elektronen entspricht. Die Elektronenemission der Kathode kann etwa durch das Auftreffen von metastabilen Atomen verursacht werden, wie näher ausgeführt wird, oder thermische Emission sein. Im letzteren Fall haben die Elektronen Maxwell'sche Verteilung, welche in die Formel eingesetzt wird. Es ergibt sich, daß man gewöhnlich keinen großen Fehler begehen wird, wenn man einfacher für die thermischen Elektronen in Volt $V_0 = T/11600$ setzt. *Zernike* (Groningen).

Guth, E., und Th. Sexl: Zur Theorie des Zusammenstoßes von α -Teilchen mit leichten Kernen. *Physik. Z.* **32**, 941—942 (1931).

Kurzer Bericht über teils bereits bekannte, teils von den Verff. neu gefundene, an anderer Stelle publizierte theoretische Ergebnisse. *P. Jordan* (Rostock).

Rostagni, Antonio: Per l'interpretazione delle oscillazioni elettroniche. Nota II. *Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. ecc.* **66**, 217—223 (1931).

Vgl. dies. Zbl. **2**, 435.

Astronomie und Astrophysik.

Bel'kovič, I.: Matrices-cracovians and their astronomical applications. *Astron. Ž.* **8**, 150—161 u. engl. Zusammenfassung 161 (1931) [Russisch].

Fesenkov, V.: Astrophysical methods and problems in the domain of actinometry and atmospheric optics and their connection to the problems of geophysics. *Astron. Ž.* **8**, 87—100 u. engl. Zusammenfassung 101 (1931) [Russisch].

Starke, D.: Wärmeleitung im Inneren von Sternen bei Berücksichtigung der relativistischen Korrekturen. (*Univ.-Sternw., Jena.*) *Astron. Nachr.* **244**, 177—184 (1931).

Im Anschluß an eine Arbeit von Vogt [*Astron. Nachr.* **243**, 197 (1931); dies Zbl. **2**, 315] über den Energietransport durch freie Elektronen im Sterninneren wird untersucht, wie der Wärmeleitungskoeffizient ϑ sich bei Berücksichtigung der relativistischen Korrekturen ändert. Diese Korrekturen rühren daher, daß bei den im Sterninneren möglichen Temperaturen und Dichten die Geschwindigkeiten der freien Elektronen der Lichtgeschwindigkeit nahe kommen können. Für den Energietransport W gilt allgemein

$$W = -\vartheta \frac{dT}{dx} = \int v_x \varepsilon f d\tau,$$

wobei ε die kinetische Energie eines Elektrons, v_x die x -Komponente seiner Geschwindigkeit, f die Verteilungsfunktion der Energie und $d\tau$ die Zahl der Zellen des Phasenraumelementes. Für f wird der Lorentz-Sommerfeldsche Ansatz

$$f(x, p_x, p_y, p_z) = f_0(x, p) + p_x g(x, p)$$

gemacht, wobei $f_0 = \frac{1}{\frac{\varepsilon}{A} e^{kT} + 1}$ die ungestörte Verteilungsfunktion ist. Nach Bestimmung von g und Ausführung der Integration ergibt sich bei Nichtentartung ($A \ll 1$)

$$\vartheta_k = \frac{8}{3} \frac{k^2}{\sqrt{2\pi m_0 k}} \ln \sqrt{T} \left\{ 1 + \frac{1}{8} \frac{kT}{m_0 c^2} + \dots \right\}$$

(m_0 Ruhmasse des Elektrons, l mittlere freie Weglänge, n Zahl der Elektronen pro Volumeneinheit). Dies unterscheidet sich von dem klassischen Wert um den Faktor in der Klammer. Bei Entartung ($A \gg 1$) kommt bis zu den Gliedern zweiter Ordnung kein Unterschied gegenüber dem klassischen Wert heraus, es bleibt

$$\vartheta_F = \frac{8\pi^3}{9} \frac{k^2}{h} T l \left(\frac{3n}{8\pi} \right)^{2/3}.$$

Siedentopf (Jena).

Sugiura, Yoshikatsu: The angular intensity distribution of continuous X-ray spectrum. IV. Some notes on the stellar opacity coefficient. *Sci. Pap. Inst. phys. a. chem. Res.* **17**, 89—110 (1931).

The author applies his previous results for the angular distribution of the X-ray spectrum to the determination of the astrophysical absorption coefficient. He integrates the intensity expression obtained all over the surface of a sphere with radius R_0 and thus compares his results with Kramers' theory. The results differ from those of Gaunt. Sugiura obtains a first correcting factor to Kramers' formula. Taking a mean value of this correcting factor, he obtains the value 43,5 for the opacity coefficient per unit mass at the centre of Capella. The astrophysical value is 53, Kramers' formula gives 5. The opacity coefficient is proportional to $Z^3 T^{-4}$ instead of $Z^2 T^{-\frac{1}{2}}$ as used by Eddington.

R. v. d. R. Woolley (Cambridge).

Fesenkov, V.: Einfluß der Absorptionslinien auf die kolorimetrische Bestimmung von Sterntemperaturen. *Izv. Akad. Nauk S.S.S.R., Otdél. mat. i estest. Nauk*, VII. s. Nr 6, 787—799 (1931) [Russisch].

Colorimetric estimates of the stellar temperatures are known to be heavily affected by numerous absorption lines and bands dispersed all along the spectrum. It is not easy to determine this important effect (especially dangerous in the case of late type stars) and to correct properly the observed colorimetric temperatures. The author of the paper under review makes such a determination in the simplest case of the early stars, whose spectra are affected principally by the Balmer lines. Using objective prism spectra obtained at Simeis Observatory and basing on trichromatic theory of color vision by Maxwell, the author derives the following corrections (δT) to the

observed colorimetric temperatures of the early stars ($H_\beta - H_\epsilon$ only being taken into account):

T	8000°	10000°	12000°	15000°	20000°
δT	+130°	+370°	+490°	+480°	+490°

It is seen that the effect in question always tends to diminish the observed colorimetric temperatures and cannot be neglected for A type stars, if accurate temperature determinations are desired.

B. P. Gerasimovič (Charkow).

Suzuki, Seitarō: The relative abundance of the chemical elements in white dwarf and its electrification. Proc. imp. Acad. (Tokyo) 7, 307—310 (1931).

Der Verf. nimmt an, daß das Innere der weißen Zwerge im Sinne der Fermi-Dirac-Statistik völlig entartet ist und daß alle Atome vollkommen ionisiert sind. Alle Elemente lassen sich aus Protonen und Elektronen aufbauen nach dem Schema

$$\mu P + \nu e \rightleftharpoons E + U,$$

wobei P ein Proton, e ein Elektron, E einen Kern bedeutet; U ist die aus dem Massen-defekt zu berechnende Bildungswärme, μ und ν sind ganze Zahlen. Die Gleichung des thermischen Gleichgewichts zwischen Protonen, Elektronen und Kernen hat bei Entartung aller Partikel die Form

$$\frac{1}{m_E} \left(\frac{c_E}{q_E} \right)^{2/3} = \frac{\mu}{m_P} \left(\frac{c_P}{q_P} \right)^{2/3} + \frac{\nu}{m_e} \left(\frac{c_e}{q_e} \right)^{2/3} + \frac{2}{h^3} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{2/3} U.$$

Darin ist m die Masse der betreffenden Partikel, c die Konzentration, q das statistische Gewicht. Da U mit der Ordnungszahl monoton wächst, müßten im Innern der weißen Zwerge die schweren Elemente am häufigsten sein. Ferner wird vermutet, daß im Sterninnern ein Elektronendefizit entsteht, so daß der Stern dem Bohrschen Atommodell ähnelt: der überdichte Kern soll positiv geladen und von einer Elektronenhülle umgeben sein.

Siedentopf (Jena).

Milne, E. A.: The internal temperature of white dwarf stars. Nature (Lond.) 1931, 999.

The author appeals to the recently discovered fact that the opacity of a degenerate gas is small, to show that the internal temperature gradient in a white dwarf star is very small. On his "generalised standard model" the star is represented by a degenerate core at approximately uniform temperature T' , surrounded by a gaseous envelope of constant opacity k_1 , where, in his usual notation,

$$T' = \frac{(R/\mu)^{5/3}}{(\frac{1}{3}a)^{2/3}K} \left(\frac{k_1 L}{4\pi cGM - k_1 L} \right)^{2/3}. \quad (1)$$

For Sirius B , $T' \sim 15 \times 10^6$ degrees, with $k_1 = 300$. Equation (1) gives a lower limit to the central temperature for all stars and indicates that the stars with the highest rate of energy-generation have the hottest cores. Contrary to previous theories, white dwarfs have the coolest centres. The author refers to a full theory which he has obtained for the "generalised standard model".

W. H. McCrea (Edinburgh).

Vogt, H.: Zur Theorie des Sternaufbaues. (Univ.-Sternw., Jena.) Astron. Nachr. 244, 49—58 (1931).

The author supposes that a star in its early stages consists of a sphere of gas contracting under its own gravitation and generating energy solely by this contraction. He seeks to find if the star will tend to form a dense central region of the kind required by Milne's model. He employs the equations of hydrostatic and conductive equilibrium, and deduces that the constitution of the star depends only on the equation of state and the quantity σ/Q , where σ is the coefficient of conductivity, and Q the mean rate of energy-generation inside radius r . With certain restrictions on the behaviour of the stellar material, including the assumption that it obeys the perfect gas laws, it is shown that the star will pass through homologous states. The removal of the restrictions does not seem to favour a greater concentration of matter towards the centre. Thus a central condensation of the type suggested by Milne is not produced under

there circumstances. The author reaches the same general conclusion in the case of a degenerate gas. Apart from what he regards as an improbable behaviour of the compressibility and opacity of stellar material, he concludes that Milne's model is not likely to represent the conditions in ordinary stars. Finally he discusses the relative merits of Milne's and other methods of discussing stellar structure, and gives reasons for believing that the very high central temperatures predicted by Milne cannot actually exist.

W. H. McCrea (Edinburgh).

Geophysik.

Weigel, Kasper: Das Problem der Verbindung mehrerer selbständig für sich berechneten Triangulierungssysteme eines größeren Kontinents. *Z. Vermessgswes.* 60, 699 bis 707 (1931).

Zur Verbindung der Triangulierungsnetze eines Kontinents zu einem Ganzen gibt Verf. ein Verfahren an, das auf einer geeigneten Zusammenstellung der einzelnen Netze beruht und die Berechnung der Dimensionen des geeignetsten Referenzellipsoides bezweckt. Unter der Annahme, daß die verschiedenen Triangulierungsnetze schon vorher endgültig (d. h. auch mit Berücksichtigung der Laplaceschen Bedingungen) ausgeglichen sind, hierbei indessen verschiedene Referenzellipsoide benutzt wurden, wird ein in der Mitte des Kontinents gelegenes Netz als Anfangssystem angenommen; die unmittelbar an dasselbe sich anschließenden Systeme bilden die erste Zone, hieran schließen sich die Systeme der zweiten Zone usw. Zur Verbindung der verschiedenen Systeme zu einem Ganzen werden Bindepunkte verwendet, die in den Grenzgebieten je zwei Systemen angehören. Diese Bindepunkte werden zunächst mit Hilfe eines astronomischen Nivellements, das in jedem Triangulierungssystem zwischen den zur Verbindung der Systeme ausgewählten Bindepunkten und dem Zentralpunkt des Systems (in dem die astronomisch bestimmten Größen Breite, Länge und Azimut den sphäroidischen gleichgesetzt wurden) durchgeführt werden muß, auf das Geoid reduziert. Auf Grund der Ergebnisse dieser Arbeiten werden die Abstände der Referenzellipsoide vom Geoid in den Bindepunkten berechnet. Aus der Bedingung, daß die Summe der Quadrate der Abstände einander entsprechender Bindepunkte zweier benachbarter Systeme ein Minimum werden soll, ergeben sich die Abstände der Mittelpunkte je zweier Referenzellipsoide und der geographische Längenunterschied der auf beiden Ellipsoiden willkürlich angenommenen Nullmeridiane (die kleinen Achsen der Ellipsoide werden als zueinander parallel vorausgesetzt). Als Resultat dieser Rechnung sind alle Punkte auf das oben erwähnte Anfangssystem bezogen. Die Ergebnisse dieses Verfahrens werden als Näherungswerte der Unbekannten benutzt, die Endergebnisse werden aus der gleichzeitigen Bestimmung der Unbekannten aller in Betracht kommenden Systeme erhalten. Die zugehörigen Fehler- und Normalgleichungen werden angegeben. Die Ableitung der Dimensionen des gemeinsamen Referenzellipsoides ist dann relativ einfach. Es werden zwei Fälle behandelt: Die Referenzfläche ist 1. ein Umdrehungsellipsoid, 2. ein Umdrehungsellipsoid mit gegebener Abplattung.

Schmehl (Potsdam).

Schuster, Jan: Projektive Verallgemeinerung des Hansenschen Problems. *Rozhl. mat.-přirod.* 10, 136—140 (1931) [Tschechisch].

● **Werkmeister, Paul:** Vermessungskunde. **Teil 1.** Stückmessung und Nivellieren. 5. Aufl. (Göschens-Samml. Nr. 468.) Berlin u. Leipzig: Walter de Gruyter & Co. 1932. 163 S. u. 146 Abb. RM. 1.80.

Schrutka, Lothar v.: Zur Berechnung von Vielecksflächen aus rechtwinkligen Koordinaten. *Österr. Z. Vermessgswes.* 29, 121—126 (1931).

Finsterwalder, S.: Höhenkarten aus weitwinkligen Luftaufnahmen. *Internat. Arch. Photogrammetr.* 7, 2. Hälfte, 7—26 (1931).

Finsterwalder, S.: Über die zweckmäßigste Verwendung der geographischen Ortsbestimmungen bei der Nadirtriangulation. Internat. Arch. Photogrammetr. 7, 2. Hälfte, 37—46 (1931).

Jeffreys, Harold: An application of the free-air reduction of gravity. Gerlands Beitr. Geophys. 31, 378—386 (1931).

Es wird eine Lösung der zweiten Randwertaufgabe in ihrer Anwendung auf die Erdfigur dadurch gegeben, daß das Potential der Erdmasse in ihrem Außenraum durch das Potential einer im Innern des Erdkörpers verlaufenden materiellen Fläche ersetzt wird. Diese Transformation hat die Gleichung $\psi = C - gh$ zur Voraussetzung, die die Potentialwerte zweier Niveaulächen miteinander verbindet. Aber die vorangehende Gleichung fordert die Existenz einer Entwicklung der Schwerkraftbeschleunigung g nach Potenzen der Seehöhe h im Außenraum der Niveauläche in Meereshöhe $g = g_0 + \frac{\partial g}{\partial h} h + \dots$; denn nur unter dieser Voraussetzung erhält man bei Beschränkung auf das konstante Glied die zugrunde gelegte Gleichung aus der bekannten Beziehung $d\psi = -g dh$. Hierin allein liegt die Ursache für die prinzipielle Bedeutung der Freiluftreduktion in der angegebenen Lösung. Hopfner (Wien).

Kawasumi, Hiroshi: On the velocity of the *P*-wave, with special reference to the discontinuity recently suggested by dr. H. Jeffreys. Jap. J. Astron. u. Geophys. 9, 15 bis 22 (1931).

Der Verf. hatte kürzlich die Geschwindigkeit der *P*-Wellen in ultrabasaltischen Schichten nach der Methode der kleinsten Quadrate aus den Beobachtungen des Erdbebens vom 21. Mai 1928 unter Zugrundelegung der Rudzki-Wiechertschen Formel $v = a - br^2$ abgeleitet und mit dem Erdradius als Längeneinheit für die Konstanten a und b die Werte 0,003509 bzw. 0,002337 erhalten. Um die Gültigkeitsgrenzen seiner Formel im Vergleich zu der von Nagaoka und anderen verallgemeinerten Formel $v = a - br - cr^2$ zu finden und gleichzeitig die von H. Jeffreys gefundene Diskontinuität in einer Tiefe von 270 km zu prüfen, die sich durch ein plötzliches Anwachsen der Geschwindigkeit von Wellen, deren Emergenzwinkel etwa 20° beträgt, um ungefähr 15% bemerkbar macht, führt der Verf. eine neue Berechnung der Laufzeitkurven durch. Hierbei berücksichtigt er die Annahme von Metuzawa, daß die Erdkruste aus zwei Schichten besteht, deren Dicke 20 bzw. 30 km beträgt, und in denen die Geschwindigkeiten 5,0 km/sek. bzw. 6,2 km/sek. ist. Die Ergebnisse seiner Berechnungen vergleicht er mit den auf Grund von 85 großen Erdbeben von Jeffreys abgeleiteten Laufzeitwerten. Der Vergleich bestätigt zunächst die von Wiechert entdeckte Diskontinuität mit den Werten $r_m = 5238$ km, $d = 1133$ km und $v_m = 12,04$ km/sek. Wird angenommen, daß der Erdbebenherd sich in 20 bzw. 50 km Tiefe befindet, so ergeben sich ähnliche Werte. Ferner zeigt sich, daß die Formel des Verf. bis zu dieser Wiechertschen Diskontinuität gut gültig ist. Die von Jeffreys und anderen vermutete oben erwähnte Diskontinuität kann der Verf. nicht bestätigen. Picht (Berlin).

Oddone, E.: Un contributo della sismometria alla storia della terra. Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. 14, 192—197 (1931).

Nach der Hypothese von G. H. Darwin soll sich der Mond von der Erde infolge der Flutwirkung seitens der Sonne abgelöst haben, als die Fluterregung mit der freien Schwingung des Erde-Mond-Urplaneten in Resonanz geraten, also die Bedingung erfüllt war: T_m (Periode der Fluterregung) = $T_r/2$ (T_r : Rotationsperiode des Urplaneten) = T_0 (Eigenperiode des Urplaneten). — Auf astronomischem Wege ergibt sich T_r zu etwa 4 Stunden. T_0 läßt sich hydrodynamisch mittels der Differentialgleichungen, die für die Schwingungen eines flüssigen rotierenden Ellipsoids gegeben sind, berechnen; es ergibt sich als Höchstwert 2 Stunden, woraus $T_r \leq 4$ Stunden folgt in nicht bester, aber doch genügender Übereinstimmung mit dem astronomischen Resultat. — In der vorliegenden Arbeit wird dieser Wert für T_0 unter Benutzung der Ergebnisse der Erdseismik zu verbessern versucht. In die Formel $T_0 (= T_r/2)$

$= \lambda/v = \pi \cdot r/v$, die die ursprüngliche Dauer der Erdrotation als Funktion des ursprünglichen Äquatorhalbmessers r und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit v darstellt, wird für v der Wert 5,6 km/sec, die heutige Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Longitudinalwellen in der sialischen (granitischen) Schicht der Erde, eingesetzt, r wird zu etwa $2R_0$ (R_0 heutiger Radius) bei einer Abplattung $\frac{r-b}{r} = \frac{1}{1,6}$ abgeleitet. So ergibt sich $T_0 = 2$, daraus $T_r = 4$ Stunden. — Verf. hält diese Übereinstimmung mit dem astronomisch gefundenen Wert für eine starke Stütze der Darwinschen Hypothese.

F. Lotze (Göttingen).

Malkin, N.: Solution du problème magnétométrique inverse pour une seule surface de séparation (cas de masses en gisement schisteux). Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R. A Nr 9, 231—235 (1931) [Russisch].

Verf. erhält die angenäherte Formel

$$h = h(x_0, y_0) = \frac{V}{2\pi C} + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{A \partial V / \partial x + B \partial V / \partial y}{2\pi C \sqrt{V^2 + 4\pi^2 C^2 [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]}} + C \left[\frac{1}{\sqrt{V_0^2 + 4\pi^2 C^2 [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]}} - \frac{1}{\sqrt{V^2 + 4\pi^2 C^2 [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]}} \right] \right\} dx dy.$$

Hierin sind: A, B, C die (konstanten) X, Y, Z Komponenten der Intensität der Magnetisierung (Z -Achse vertikal und positiv nach unten); $V = -A \partial Q / \partial x - B \partial Q / \partial y - C \partial Q / \partial z$,

wo $Q = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^h \frac{dx dy dz}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}$, V ist das magnetische Potential an der

unendlichen Ebene XY ; h die Tiefe unter dem Punkte (x_0, y_0) der durch die Ebene XY von oben begrenzten homogenen magnetisierten Schicht. V_0 der Wert von V im Punkte (x_0, y_0) . Nach Ansicht des Verf. ist die Ableitung der Formel mathematisch nicht streng; es sei jedoch deswegen nicht ausgeschlossen, daß die Formel in der Praxis Verwendung findet.

L. Tuwim (Potsdam).

Riordan, John: Transients in grounded wires lying on the earth's surface. Bell Syst. techn. J. 10, 420—431 (1931).

Es wird angenommen, daß die Stromstärke in einem geerdeten Draht, der an der Erdoberfläche liegt, plötzlich von einem konstanten Wert auf einen anderen konstanten Wert übergeht. Die resultierenden Spannungen in einem zweiten solchen Draht werden berechnet für typische Fälle, wie sie in Gleich- und Wechselstromkreisen auftreten. Nomogramme für numerische Berechnung sind beigelegt. **J. Bartels.**

Ehrenburg, D. O., and R. J. Watson: Mathematical theory of electrical flow in stratified media with horizontal, homogeneous and isotropic layers. Techn. Publ. amer. Inst. min. a. metallurg. Eng., Cl. L Nr 400, 1—18 (1931).

Die Theorie der geoelektrischen Widerstandsmethoden zur Erforschung des horizontal geschichteten Untergrundes erfordert die Kenntnis der Potentialfunktion für eine im planparallel geschichteten Medium befindliche Stromquelle. Diese Funktion ist zuerst von J. N. Hummel für den Fall von vier Schichten beliebiger Mächtigkeit und beliebiger Leitfähigkeit der homogenen isotropen Medien mittels der Thomson'schen Spiegelungsmethode gegeben worden. Ansätze für den allgemeinen Fall beliebig vieler Schichten lieferten auf rein analytischem Wege S. Stefanescu in Zusammenarbeit mit C. und M. Schlumberger, die unter Verzicht auf Anschaulichkeit von der Laplaceschen Gleichung und den Grenzbedingungen ausgehen. Jedoch erweist sich auch bei ihnen die explizite Darstellung des Potentials schon bei fünf Schichten als so kompliziert, daß die numerische Auswertung praktisch unmöglich erscheint. — Den Verff. gelingt es, auch für mehr als vier Schichten einfachere Beziehungen mittels eines Kunstgriffes zu erhalten, indem sie die praktisch bedeutungs-

lose Einschränkung machen, daß zwischen den Schichtdicken eine rationale kommensurable Proportion bestehen soll. Der tiefere Grund für die sich dann ergebende Vereinfachung liegt darin, daß die Spiegelbilder der Quelle immer wieder aufeinanderfallen müssen, so daß man dieselbe einfach unendliche Mannigfaltigkeit fiktiver Quellpunkte erhält wie bei drei Schichten. Bei der Ausführung der Rechnung kombinieren sie die analytische mit der synthetischen Methode. Sie führen zunächst fiktive Schichtgrenzen in der Weise ein, daß alle Grenzen äquidistant sind. Auf ein solches Schichtenpaket wenden sie die Vorstellung der elektrischen Bilder an, um für die Potentiale versuchsweise Ansätze zu machen, die zunächst eine Reihe noch zu bestimmender Koeffizienten erhalten. Mittels der Grenzbedingungen lassen sich diese Koeffizienten dann ganz systematisch bestimmen. Die fiktiven Schichtgrenzen fallen zum Schluß heraus, indem die so getrennten Schichten gleiche Leitfähigkeit erhalten. Es wird noch gezeigt, wie sich die Ergebnisse auf die Wennersche Methode zur Bestimmung des scheinbaren spezifischen Widerstandes anwenden lassen. Ferner werden praktische Hinweise auf die Vornahme der Feldarbeiten gegeben.

J. N. Hummel (Göttingen).

Chapman, S.: Some phenomena of the upper atmosphere. Proc. roy. Soc. London A 132, 353—374 (1931).

Bakerian Lecture. — Zusammenfassung der Fortschritte der letzten Jahre in Theorie und Beobachtung zu einer Gesamtschau. — Aus der Theorie der Absorption von Sonnenstrahlung in einer Atmosphäre folgt, daß die beobachteten 3 Schichten einigermaßen scharf voneinander getrennt sind. Man erhält für die Ozonschicht (bei 50 km): von 35—85 km, für die Heavisideschicht (bei 100 km): von 85—135 km, für die Appletonschicht (bei 220 km): von 175—325 km. — Die Bedingungen des chemischen Gleichgewichts für O_3 , O_2 und O werden aufgestellt. Sie ergeben: bezogen auf O_2 nimmt der Gehalt an Ozon mit wachsender Höhe dauernd ab (die bisherigen Temperaturberechnungen der Atmosphäre müssen also revidiert werden, da sie mit Konstanz oder Zunahme rechneten), dagegen der Gehalt an O dauernd zu, so daß atomarer Sauerstoff schließlich Hauptbestandteil der oberen Lufthülle sein dürfte und nicht H_2 oder He . Dafür spricht ja auch der spektroskopische Befund. — Ultraviolette Sonnenstrahlung wird vor allem O ionisieren wegen der niedrigen Voltzahl (13,6). Hierfür stehen die Wellen von 910 Å bis 770 Å zur Verfügung. Erst unter 770 Å konkurrieren O_2 , H_2 und N_2 . — Die Theorie (Milne-Gaunt) verfeinert Pannekoeks Überlegungen. Sie gestattet, quantentheoretisch den lichtelektrischen Absorptionskoeffizienten zu berechnen, unter Berücksichtigung der Schirmwirkung innerer Elektronenringe, sowie den Wiedervereinigungsfaktor. Daraus folgen für jedes Gas die Werte für die maximale Ionendichte, die zugehörige Luftdichte und hieraus endlich die (ungefähre) Höhe der größten Ionisation; z. B. für O das Maximum in 200 km Höhe, Elektronendichte: $4 \cdot 10^6$, was mit Appletons Beobachtungen (220 km; $2 \cdot 10^6$) gut übereinstimmt. Da O_2 und N_2 nur $1/10$ der verlangten Ionendichte ergeben, folgt somit aus der Theorie: die obere (200 km) Schicht liegt klar über der Heavisideschicht; hier wird atomarer Sauerstoff durch ultraviolettes Licht ionisiert. — Die untere (Heaviside-) Schicht wird dagegen durch neutrale Teile (Atome) ionisiert. Diese kommen zusammen mit geladenen Teilen durch Strahlungsdruck von der Sonne. Sie fliegen geradlinig zur Erde, während die geladenen durch das Erdmagnetfeld zu den Polen gelenkt werden und hier das Polarlicht erzeugen. Beide Arten werden gleiche Eindringungstiefe haben: für das Nordlicht ist diese beobachtet zu rund 100 km. Auch die Theorie der mondtägigen erdmagnetischen Variation (Schuster, Chapman), die mit den magnetischen Stürmen parallel geht, führt zusammen mit Betrachtungen über die Leitfähigkeit (Pedersen) zu einer solchen ionisierten Schicht in 100 km Höhe. Ionisiert wird jedenfalls N_2 (Dämmerungsbeobachtungen). — In 200 km Höhe gibt es neben den positiven Ionen fast nur freie Elektronen, in 100 km Höhe dagegen durch Anlagerung der Elektronen bei größerer Dichte fast nur positive und negative Ionen. Nun verlangen (100 km) Radiomessungen Elektronendichten von $6 \cdot 10^5$ pro Kubikzentimeter, erd-

magnetische Variationen aber Ionendichten von 10^8 — 10^9 . Dieser anscheinende Widerspruch ist damit aufgeklärt; denn wegen der geringeren Beweglichkeit der Ionen entsprechen $6 \cdot 10^5$ Elektronen rund $2 \cdot 10^{10}$ Ionen. — Kurz nach Sonnenuntergang entstehen keine neuen Elektronen mehr; die vorhandenen lagern sich unten bald an, nur höher hinauf haben sie längere Lebensdauer wegen der größeren freien Weglänge. Das erklärt das beobachtete Hinaufrücken der Schicht um Sonnenuntergang. — Die tägliche Variation der Ionisation gibt noch einmal den Wiedervereinigungsfaktor in befriedigender Übereinstimmung mit Milnes Formel. — Den Beschluß bilden Betrachtungen über das grüne Licht des Nachthimmels (aus metastabilen O-Atomen). Verf. benutzt Rayleighs Intensitätsmessung und schließt daraus auf Entstehung in 100—200 km Höhe. Hauptenergiequelle wohl: $O + O = O_2$ (6 Volt), also nicht mehr O_3 . Fritz Bartels (Magdeburg).

Chapman, S., S. K. Pramanik and J. Topping: The world wide oscillations of the atmosphere. Gerlands Beitr. Geophys. **33**, Köppen-Bd. 2, 246—260 (1931).

Die Arbeit behandelt die hauptsächlichsten weltweiten Schwingungen der Atmosphäre, d. h. die sonnentägigen Druckwellen mit den Perioden von 24, 12, 8 und 6 Sonnenstunden, sowie die mondentägigen von 24 und 12 Mondstunden. Hauptziel ist die Diskussion der Theorie, wonach Resonanz für die Vergrößerung gewisser Schwingungen verantwortlich ist. Die drei wesentlichen Ursachen für atmosphärische Schwingungen sind: Gezeitenkräfte, ausgedrückt durch eine skalare Potentialfunktion; Schwankungen der Lufttemperatur; Vertikalbewegungen der Land- und Meeroberfläche relativ zum mittleren Niveau. Diese 3 Größen sowohl wie die Druckschwankungen werden als Summe von Termen in Kugelfunktionen ausgedrückt; wegen der Linearität der Bewegungsgleichungen stehen nur gleichartige Terme in Beziehung zueinander. Die Hypothese der starken Resonanz, die zuerst nur für die 12stündige Druckschwankung der Form P_2^2 aufgestellt war, bringt die Voraussage von Resonanz in drei anderen Fällen mit sich, und die Beobachtungen bestätigen die Theorie für die lunare Doppelwelle der Form P_2^2 , die 12stündige zonale Schwingung der Form P_2^0 und die 8stündige Welle der Form P_4^3 . Im Anhang werden Tabellen für die 8stündige Temperaturschwankung an 27 Stationen gegeben. J. Bartels (Washington).

● **Haurwitz, Bernhard: Zur Theorie der Wellenbewegungen in Luft und Wasser.** (Veröff. d. Geophys. Inst. d. Univ. Leipzig. Hrsg. v. L. Weickmann. 2. Ser. Spezialarb. a. d. Geophys. Inst. Bd. 5, H. 1.) Leipzig: Geophys. Univ.-Inst. 1931. 106 S. u. 5 Abb.

Das Hauptziel seiner Untersuchung sieht der Verf. nicht in der Erklärung eines bestimmten Problems aus dem Gebiet der geophysikalischen Wellenerscheinungen, sondern in der Gewinnung eines Überblicks über den Einfluß der vertikalen Dichteverteilung und der Kompressibilität auf die Wellenausbreitung. Da „derartige Untersuchungen seitens der Geophysiker häufig mit unzureichenden analytischen Hilfsmitteln unternommen worden sind“, legt Verf. besonderen Wert auf die zunächst rein theoretisch bedeutungsvolle Ableitung und Diskussion von Formeln. Aus den Bjerkneschen Störungsgleichungen in Eulerscher Form werden durch Abspaltung der periodischen Anteile der Störungsgrößen gewöhnliche Differentialgleichungen für die nur von der Vertikalkoordinate abhängigen Störungsamplituden gewonnen und deren unter Berücksichtigung der entsprechenden Grenzbedingungen ermittelte Lösungen diskutiert. Derart werden untersucht: die Wellenbewegungen einer inkompressiblen Flüssigkeit mit 1. exponentiell mit der Höhe abnehmender Dichte, mit 2. linear mit der Höhe sich ändernder Grundströmung (bei konstanter Dichte) und 3. die Wellenbewegungen eines isotherm geschichteten Gases. Aus jeder dieser Gruppen werden Mehrschichtenprobleme behandelt (2 oder 3 Schichten zwischen starren Grenzflächen oder mit freier Oberfläche und starrer unterer Grenze). Speziell am Beispiel der Luftwogen zeigt dann Haurwitz, daß die Berücksichtigung der Kompressibilität und der (isotherm angenommenen) Schichtung wesentlich bessere Übereinstimmung mit der Erfahrung ergibt als die Helmholtz-Wegenersche Theorie. — Bemerkt sei noch, daß

alle Probleme zweidimensional (senkrechte x, z -Ebene) behandelt wurden, so daß nur die y -Komponente des Drehvektors der Erdrotation berücksichtigt werden konnte (in der Theorie der Luftwogen wurde auch diese vernachlässigt). *Ertel* (Berlin).

Kotschin, N.: Über die Stabilität von Margulesschen Diskontinuitätsflächen. Beitr. Phys. fr. Atmosph. 18, 129–164 (1931).

Das bekannte Margulesche Modell einer Diskontinuitätsfläche, gebildet durch zwei inkompressible Flüssigkeiten verschiedener Dichte ($\varrho_1 > \varrho_2$), die mit der Relativgeschwindigkeit $U_2 - U_1$ längs der x -Achse keilförmig übereinander vorbeiströmen, wird mittels der Methode der superponierten kleinen Störungen unter Verwendung der in der Theorie langer Wellen gestatteten Vereinfachungen auf Stabilität untersucht. Das System wird nach oben durch eine in der Höhe h liegende horizontale starre Ebene abgeschlossen gedacht; die Gleichung der gestörten Diskontinuitätsfläche sei $z = y \cdot \operatorname{tg} \delta + \zeta(x, y, t)$, worin δ den Keilwinkel der Marguleschen Gleichgewichtslage bedeutet. Für „zonale“ Schwingungen, worunter Kotschin solche versteht, bei denen die Störungsgrößen (ζ, u_j, v_j, p_j ; $j = 1, 2$) von x unabhängig sind, lassen sich die Störungsgrößen durch die der Gleichung

$$(1 - \eta^2) \frac{d^2 W_n}{d\eta^2} + n(n+1)W_n = 0 \quad \left(\eta = \frac{2y-l}{l}; l = h \cdot \operatorname{ctg} \delta \right)$$

und den Randbedingungen $W_n(\pm 1) = 0$ genügenden Eigenfunktionen

$$W_n(\eta) = \frac{(\eta^2 - 1)P'_n(\eta)}{n(n+1)} \quad (P_n = \text{Legendresche Polynome})$$

ausdrücken, z. B.:

$$\zeta(\eta, t) = \zeta(\eta, 0) - \frac{2}{l} \sum_1^\infty n [A_n \sin \sigma_n t + B_n (1 - \cos \sigma_n t)] \frac{W'_n(\eta)}{\sigma_n},$$

worin A_n, B_n die Entwicklungskoeffizienten der Randbedingungen nach den Eigenfunktionen W_n bedeuten und

$$\sigma_n = \sqrt{4\omega^2 - \frac{4\omega n(n+1)(\varrho_1 U_1 - \varrho_2 U_2)}{l(\varrho_1 - \varrho_2)}}$$

die Eigenfrequenzen darstellen ($\omega = 2\pi/\text{Pendeltag}$). Angewandt auf einen Anfangszustand, bei dem die Diskontinuitätsfläche eine geneigte Ebene mit nur wenig von der Gleichgewichtslage δ abweichendem Neigungswinkel ist, ergibt sich das Resultat, daß die Diskontinuitätsfläche nicht um die Gleichgewichtslage schwingt, sondern um eine Mittellage, die zwischen Gleichgewichts- und Anfangslage liegt. — Bei der Untersuchung der schwierigeren zu behandelnden „nichtzonalen“ Schwingungen beschränkt sich Kotschin auf solche von der Form $\zeta = \bar{\zeta}(y) \cdot \exp i(kx + \bar{\sigma}t)$ ($\bar{\zeta}$ = komplex), wodurch sich die Aufgabe auf die Ermittlung der Eigenwerte und -lösungen zweier simultaner Diff.-Gleichungen unter Berücksichtigung von zwei Randbedingungen für die Drückstetigkeit und zwei Regularitätsforderungen für $\eta = \pm 1$ reduziert. Mit $U = \frac{1}{2}(U_2 - U_1)$ ergeben sich folgende Stabilitätskriterien:

	Lange Wellen ($\lambda \gg 4U/\omega$)	Kurze Wellen
$l\omega < 2U$	stabil	labil
$l\omega > 2U$	labil	labil

Ferner ist für sehr große Werte von $l\omega/U$ die Bewegung nur für Wellenlängen in der Umgebung von $\lambda_0 = \pi U/\omega$ stabil; dann können für alle $\lambda < 0,93 \lambda_0$ die Stabilitätsbedingungen auch geschrieben werden: Stabilität für $l\omega < 2U$, Labilität für $l\omega > 3U$. — Die gefundenen Resultate werden zur Beantwortung der Frage herangezogen, ob sich die atmosphärische Diskontinuitätsfläche (Polarfront) in einzelne Wirbel (Zyklonen) auflösen kann. Die hierzu notwendige Bedingung $U < \sqrt{gh(\varrho_1 - \varrho_2)/4(\varrho_1 + \varrho_2)}$ (unabhängig von ω !) liefert mit $h = 8 \text{ km}$, $(\varrho_1 - \varrho_2)/(\varrho_1 + \varrho_2) = \frac{1}{210}$ für U die Größenordnung $U < 16 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-1}$, also eine realisierbare Bedingung. *Ertel* (Berlin).

Wagemann, H.: Eine Faustformel zur Berechnung der Verlagerungsgeschwindigkeit von Hoch- und Tiefdruckausläufern. *Ann. Hydrogr.* 59, 261—264 (1931).

Durch Vereinfachung der von J. M. Angervo (*Gerlands Beitr. z. Geophysik* 27, 1930, 258; *Meteorol. Z.* 1930, 314, 354) entwickelten Formeln zur Vorausberechnung der Lage der Tief- und Hochdruckzentren wird folgende Näherungsformel für die Verlagerungsgeschwindigkeit (v) isobarer Extrempunkte abgeleitet:

$$v = - \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial x} : \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

(x = Achsenrichtung, t = Zeit, p = Luftdruck). Es wird gezeigt, daß dieser Ausdruck für die Praxis genügend genaue Werte liefert; die Fehler werden durch Vergleich mit der strengen Formel diskutiert.

Ertel (Berlin).

Hulburt, E. O.: The temperature of the lower atmosphere of the earth. *Physic. Rev.*, II. s. 38, 1876—1890 (1931).

The writer attempts to calculate the height-distribution of temperature in the atmosphere, in purely radiative equilibrium subject to the daily heating by the sun: 32 per cent of the solar radiation is supposed reflected back into space, the remainder reaching the earth, whence it is re-radiated at earth-temperature. The atmosphere is heated by this radiation, absorbed by water vapor, carbon dioxide and ozone in the infra-red; it re-radiates both upward and downward. Equations of absorption are given, and graphs of the assumed absorption coefficients. By a tentative process, and on the basis of certain assumptions as to the distribution of the absorbing gases, the writer arrives at the value 306° absolute for the mean atmospheric temperature at sea level. This is about 19° above the actual value. But the writer appears to have made the calculation as if the sun's radiation were constant, instead of varying throughout the day and absent during the night; if this be so, the discrepancy between his result and the facts is in the direction to be expected. But at levels above 5 km. his calculated temperatures are many degrees less than those observed; he infers that an atmosphere in radiative equilibrium would be dynamically unstable below about 5 km., and convective mixing and interchange of temperature would ensue. When the convective region extends to 10 or 12 km. (as is observed) the atmosphere is found to be stable, the calculated sea level temperature being 290° , almost equal to the observed value; but the convective region cannot extend beyond 12 or 15 km. The analysis does not show why the temperature in the lower stratosphere is uniform with height. A brief discussion of the effect of ozone on the atmospheric temperature leads to the conclusion that it lowers the surface temperature by about one degree. The carbon dioxide theory of the ice ages is also referred to; the writer regards it as at least possible, and considers that the objections raised against it by various physicists are not valid.

S. Chapman (London).

Bozza, Gino: Studi sull'essiccamento. I. (*Ist. di Chim. Industr., Univ., Milano.*) *Rend. Ist. lombardo Sci.*, II. s. 64, 409—426 (1931).

Bozza, Gino, e Ismaele Secchi: Studi sull'essiccamento. II. (*Ist. di Chim. Industr., Univ., Milano.*) *Rend. Ist. lombardo Sci.*, II. s. 64, 464—474 (1931).

Nach einigen kritischen Betrachtungen über die Phänomene, welche dem Trocknen einer soliden Substanz entsprechen (mit oder ohne Deformationen), leitet der Verf. die allgemeine Differentialgleichung des Problems ab, welche folgende Form besitzt:

$$\lambda_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{d\lambda_x}{dw} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{d\lambda_y}{dw} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{d\lambda_z}{dw} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 = \frac{\partial w}{\partial t},$$

für die Funktion w , die die Feuchtigkeit darstellt. Unter zwei vereinfachenden Hypothesen (keine Kontraktion, Konstanz des Austrocknungskoeffizienten) und der betreffenden Randbedingungen stellt er mit Reihenentwicklungen die Feuchtigkeit w im Innern eines nicht hygroscopischen Körpers von der Form einer Platte oder eines Parallelepipeds dar, sei es für oberflächliche Feuchtigkeit größer oder kleiner als die kritische. Zuletzt macht Bozza einige Bemerkungen betreffs der praktischen Auswertung der Formeln. Die zweite Mitteilung betrifft die experimentelle Ermittlung des Verdunstungskoeffizienten α , und für solchen Zweck wird u. a. eine Formel abgeleitet, welche α gibt, wenn der Dampfdruck als nicht konstant über die ganze verdunstenden Oberfläche betrachtet werden kann.

Bossolasco (Turin).